Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu e-mail: boronkay@vac.hu

Diszkusszió, azaz
-Hány féle megoldás lehet?-

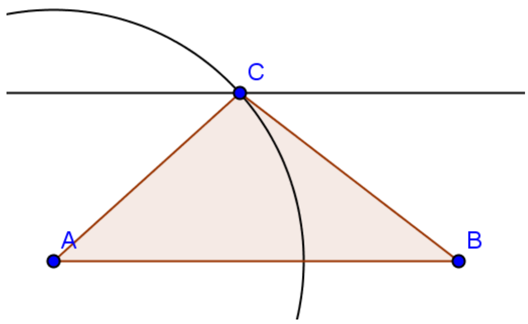
Az Idegen Szavak Szótára szerint a *diszkusszió* latin eredetű szó, jelentése: megbeszélés, tanácskozás, vita, eszmecsere. De vajon mit jelent a matematikában? Gyakran esünk abba a hibába, hogy nekiülünk egy feladat megoldásának, találunk egy megoldást, és azt hisszük, ezzel végére is jártunk a feladatnak, hisz megtaláltuk „A Megoldást”. Igen ám, de gyakran nem egy megoldás van. S ami ennél talán még fontosabb, sokszor nem is az a kérdés, hogy mi a megoldás, hanem az, hogy hány megoldás van és milyenek ezek a megoldások a bemenő adatoktól függően. Gondoljatok az orvosi kutatásokra: nem az a jó eredmény, ha egy kísérleti nyúl meggyógyul a kezelés hatására, hanem az, ha mind.
Tehát a diszkusszió a matematikában a megoldás szám vizsgálatát jelenti. Hogyan lehet ezt vizsgálni? Nézzünk néhány példát. Kezdjük egy geometriai szerkesztési feladattal.

Mintapéldák

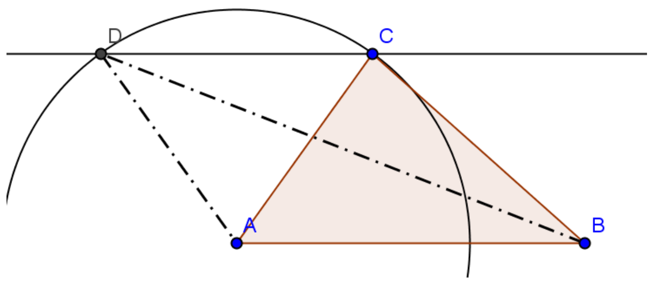
1.) Szerkesszünk háromszöget, ha az egyik oldala 8cm, az oldallal szemközti csúcs 3cm-re van, és adott még egy 5cm hosszú oldal!

Szerkesztés menete:

- *felvesszük egy 8cm hosszú szakaszt,*
- *ettől 3cm-re lévő pontok a szakasszal párhuzamos egyenesen vannak, megszerkesztjük a párhuzamost,*
- *5cm-t körzőnyílásba veszünk és a 8cm hosszú szakasz egyik végpontjából körzőzünk, ahol metszi a párhuzamost, ott lesz a harmadik csúcs,*
- *összekötjük a csúcsokat.*

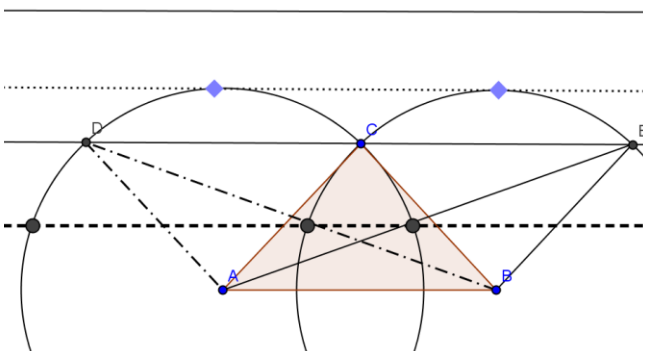


A megoldást így találtunk, de vajon mindet megtaláltuk-e? Lehet, hogy a B csúcsból körzőztünk volna más megoldást kapunk? Ebben az esetben a B csúcsból meghúzott körív ugyanabban a pontban metszi az egyenest, a gond máshol van.
A körívnek csak egy darabját húztuk meg, megelégedtünk azzal, hogy találtunk egy metszéspontot. Egészítsük ki az ábrát!



Így már jól látszik, hogy két különböző háromszöget kapunk, ABC és ABD háromszög egyaránt megfelel az adatoknak.
Ha a B csúcsból húznánk meg az 5cm sugarú körívet, akkor keletkezne még egy E metszéspont is, de ABE háromszög az ABD háromszögnek az AB szakasz felezőmerőlegesére vett tengelyes tükörképe lenne. Vagyis két egybevágó háromszög keletkezne. Tehát összesen három háromszöget találtunk, de ezek közül kettő egybevágó.

Nézzük ezek után, mit jelent a diszkusszió: Azt vizsgáljuk például, hogy a két adott oldal hosszát nem változtatva, mi történik, ha az adott magasságot csökkentjük vagy növeljük, vagyis a párhuzamost kezdjük tologatni.



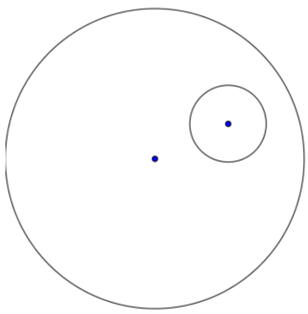
- *ha csökkentjük a magasságot, akkor 4 pontban metszi a párhuzamost a két körív, azaz 4 megfelelő háromszög keletkezik, és ezek közül kettő-kettő egybevágó.*
- *ha növeljük a magasságot, akkor lesz egy olyan pont, amikor a párhuzamos egyenes mindkét körívet érinteni fogja, azaz két egybevágó háromszög lesz a megoldás.*
- *ha még tovább növeljük a magasságot, akkor pedig nem keletkezik metszéspont, azaz nem szerkeszthető ilyen háromszög.*

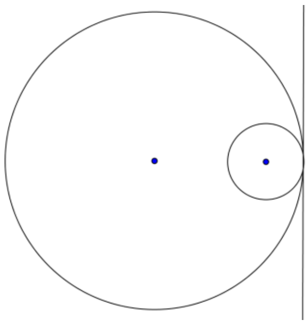
<u>Megjegyzés:</u> Geometriai, szerkesztési feladatok esetén gyakran az egybevágó megoldásokat nem tekintjük különbözőnek. Ha így vesszük, akkor fenti feladatnál a megoldásszámok a következőképpen alakulnak: nincs megoldás, egyértelmű megoldás van, két különböző megoldás van.
Tehát ez a diszkusszió. A bemenő adatok változtatása mellett figyelem, hogy hány megoldás van.

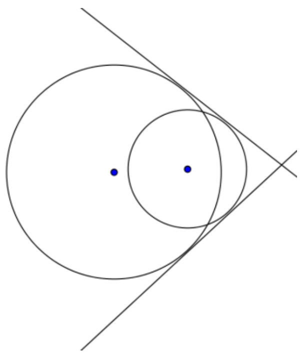
2.) Adott két kör, szerkesszük meg a közös érintő egyeneseiket!

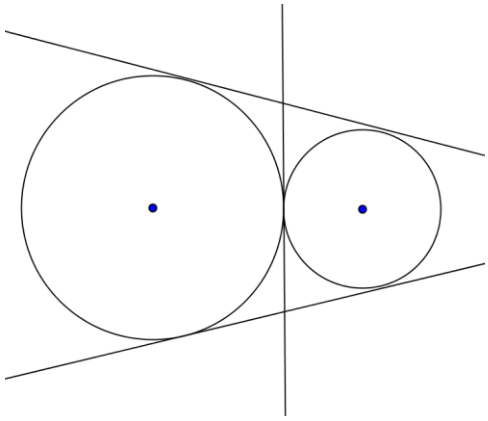
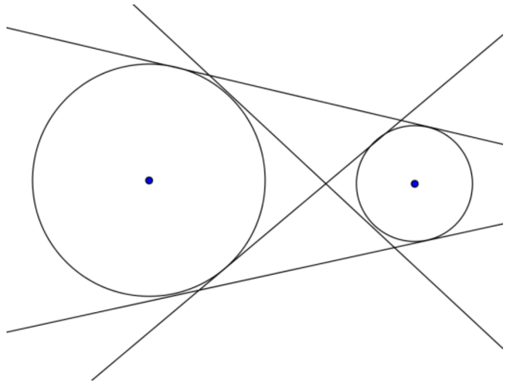
A szerkesztés menetével majd középiskolában foglalkoztok, minket most az érdekel, hogy a két adott kör elhelyezkedésétől függően hány közös érintő egyenes szerkeszthető.

- *Ha a két körnek nincs közös pontja, és az egyik a másikon belül helyezkedik el, akkor nincs közös érintő.*
- *Ha a két körnek egyetlen közös pontja van, és az egyik a másikon belül helyezkedik el, akkor pontosan egy közös érintő van.*
- *Ha a két kör metszi egymást, akkor két közös érintő van.*
- *Ha a két kör kívülről érinti egymást, akkor három közös érintő van.*
- *Ha a két kör egymáson kívül helyezkedik el és nincs közös pontjuk, akkor négy közös érintő van.*







Más témaköröknél is előfordul, hogy vizsgáljuk a megoldásszámot. Erre már láttatok példát, amikor egyenleteket oldottatok meg.

3.) Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $x+3=5$

b) $x+3=2x+1-x+2$

c) $x+3=x$

Alkalmazzuk a mérlegelvet mindhárom esetben. Jól látható, hogy:

a) az első esetben egyértelmű megoldást kapunk, $x=2$,

b) a második esetben rendezés után azt kapjuk, hogy $0=0$*, ami* x *– től függetlenül mindig teljesül, tehát* x *lehet bármely valós szám,*

c) a harmadik esetben rendezés után $3=0$ *adódik, ami nem igaz, tehát nincs megoldás.*

4.) Milyen értéket vehet föl p , hogy pontosan egy megoldása legyen az alábbi egyenletnek?

$$2x+8=px+8$$

- *Ha* $p=2$*, akkor az egyenlet két oldala megegyezik, azaz* x *bármely valós szám lehet, nincs egyértelmű megoldás.*
- *Bármely 2-től különböző érték esetén rendezzük az egyenletet a szokásos módon:*

$$2x-px=0$$
$$(2-p)x=0$$

Egy szorzat csak akkor lesz 0, ha valamelyik tényezője 0, de mivel p *egy 2-től különböző szám, így* $2-p$ *nem lehet 0, tehát az egyetlen megoldás az* $x=0$

Tehát, ha p *bármely 2-től különböző valós szám, akkor a feladat megoldása egyértelmű, nevezetesen* $x=0$.

5.) Milyen értéket vehet föl p, ha azt szeretnénk, hogy az alábbi egyenletnek legyen megoldása?

$$2x+5=px+3$$

Gyűjtsük a szokásos módon az ismeretlent tartalmazó kifejezéseket egy oldalra, majd vonjunk össze:

$$2x-px=3-5$$
$$(2-p)x=-2$$

Ha itt $6x=2$ *állna, akkor mindenki azt mondaná, hogy osszunk 6-tal. Most is ezt kell tenni, szeretnénk osztani* $(2-p)$*-vel. De lehet? Ha történetesen* $p=2$*, akkor az egyenletünk egyszerűbb alakot ölt, nevezetesen* $0\cdot x=-2$*, ami nyilván lehetetlen, azaz ilyenkor nincs megoldás. Ha* p *egy 2-től különböző valós szám, akkor* $2-p$ *nem 0, egy nullától különböző valós számmal pedig tudunk osztani. Ilyenkor* $x=\dfrac{-2}{2-p}$ *lesz az egyértelmű megoldás.*

Tehát ha p *egy 2-től különböző valós szám, akkor van megoldása a feladatnak, és ráadásul ez a megoldás egyértelmű is. (Pl. ha* $p=4$*, akkor* $x=\dfrac{-2}{2-4}=1$*)*

Gyakorló feladatok

1.) Adott három egyenes. Szerkessz olyan kört, mely mindhárom egyenest érinti. (Ismét az a kérdés, hogy az egyenesek helyzetétől függően, hány ilyen kör van. A szerkesztés menete itt most nem érdekes.)

2.) Adott két pont és rajtuk kívül egy egyenes. Hol helyezkednek azok a pontok, melyek az adott pontoktól és az egyenestől is legfeljebb 2cm-re vannak?

3.) Hogyan válasszuk meg a $10x + 7 = ax + b$ egyenletben a és b értékét, hogy a feladatnak:
   a) ne legyen megoldása,
   b) egyértelmű megoldása legyen,
   c) végtelen sok megoldása legyen?

4.) A p milyen értékeinél lesz a következő egyenlet megoldása negatív, pozitív, ill. nulla?

$$3(x-p) = \frac{3x-7p}{5} + 1$$

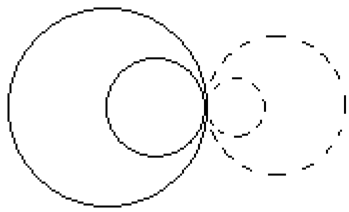
Kitűzött feladatok

1.) Adott két pont, A és B. Szerkesszünk pontot, amely az A ponttól 2, a B ponttól 3 cm távolságra van. Keresd meg az összes lehetséges elrendezést!

2.) Foglalkozzunk most az előző feladat azon eseteivel, ahol csak egy megoldás van. Helyezzük most el most a pontokat derékszögű koordináta-rendszerben, legyenek A koordinátái A(2;1). Add meg azoknak a lehetséges B pontoknak a koordinátáit, melyekre igaz, hogy mindkét koordinátája egész! (Itt most legyen 1 cm az egység a koordináta-rendszer tengelyein.)

3.) Adott két kör és egy pont. Hány olyan kör létezhet, mely a két adott kört érinti, az adott ponton pedig átmegy? Ismét nem a szerkesztés, hanem a megoldásszám az érdekes. Minden esetre rajzolj egy példát!

Például: a két adott kör érinti egymást, az adott pont pedig a körök érintési pontja. Ilyenkor végtelen sok megfelelő kör létezik.



4.) Két munkás közül az egyik naponta a,a másik b munkadarabot készít el. Eddig az első p, a második q munkadarabot készített el. Hány nap múlva lesz egyenlő a két munkás által elkészített munkadarabok száma, ha naponta mindegyikük egyenlő ideig dolgozik? (Minden lehetőségre gondolj!)

Beküldési határidő: **2012.12.15.**
Postai cím: Matematikai Tehetségfejlesztő,
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.