Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

DÖNTŐ

5. OSZTÁLY

1) A szabadságharc egyik csatája előtt a csata helyszínén kezdetben az osztrák csapat 34 ágyúval rendelkezett, míg a magyar csapatnak nem volt ágyúja. A csata helyszínére tüzérségi ellátmány érkezett mindkét csapat számára. Így az osztrák csapat tüzérsége óránként 3 ágyúval, a magyar csapat tüzérsége pedig 5 ágyúval gyarapodott. Mennyi idő múlva lesz egyenlő a két csapat ágyúinak a száma?

   Megoldás:

   Az osztrák csapat tüzérsége óránként 3 ágyúval, a magyar csapat tüzérsége pedig 5 ágyúval gyarapodott. Ezért az osztrák, illetve magyar csapat ágyúi közötti különbség óránként 2 ágyúval csökkent. Mivel kezdetben a különbség 34 ágyú volt, ezért $34:2=$ **17 óra múlva lesz egyenlő a két csapat ágyúinak száma.**

2) András és Béla egy szabályos dobókockával háromszor dobnak. András arra tippel, hogy az így kapott három szám összege legalább 16 lesz. Béla tippje szerint pedig a kapott számok szorzata legfeljebb 4 lesz. Melyiküknek van nagyobb esélye arra, hogy a tippje helyes legyen?

   Megoldás:

   András abban az esetben nyer, ha a számok összege 18, 17, illetve 16. Ezekben az esetekben a következő összegek jöhetnek számításba:
   $6+6+6=18$ 1 eset
   $6+6+5=17$ 3 eset
   $6+6+4=16$ 3 eset
   $6+5+5=16$ 3 eset
   Tehát András összesen 10 esetben nyerhet.
   Béla szerint a kapott számok szorzata 1, 2, 3, illetve 4 lehet. Ezekben az esetekben a következő szorzatok jöhetnek számításba:
   $1\cdot 1\cdot 1=1$ 1 eset
   $1\cdot 1\cdot 2=2$ 3 eset
   $1\cdot 1\cdot 3=3$ 3 eset
   $1\cdot 1\cdot 4=4$ 3 eset
   $1\cdot 2\cdot 2=4$ 3 eset
   Tehát Béla összesen 13 esetben nyerhet.
   A fentiekből következik, hogy Bélának van nagyobb nyerési esélye.

3) Négy ember András, János, Pista és Józsi egy üveg pálinkát vásároltak, azzal a céllal, hogy közösen isszák meg. Viszont mielőtt erre sor került volna a pálinkát valamelyikük titokban megitta. Ezután a következőket mondták:
   János: *Nem én ittam meg.*
   András: *Nem János itta meg.*
   Pista: *András itta meg.*
   Józsi: *János itta meg.*
   Ki itta meg a pálinkát, ha a négy ember közül pontosan egy mondott igazat?

   Megoldás:

   Könnyen észrevehető, hogy András és Józsi állítása egymás ellentettje, ezért az egyik biztosan igaz. Tehát János és Pista állítása biztosan hamis. Mivel János állítása hamis, ezért ő itta meg a pálinkát. Ugyanakkor az is következik, hogy Józsi egyedül mondott igazat, a többiek állítása hamis. **Tehát János itta meg a pálinkát.**

4) Egy sorozatot úgy képezünk, hogy az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyeket először növekvő sorrendben, majd csökkenő sorrendben írjuk, majd újra növekvő, illetve csökkenő sorrendben, és így tovább. Tehát az említett sorozat a következő:

   1; 2; 3; 4; 5; 5; 4; 3; 2; 1; 1; 2; 3; 4; 5; 5; 4; 3; 2; 1; …

   Határozzuk meg:
   a) a sorozat 52. tagját;
   b) a sorozat első 47 tagjának összegét.

   Megoldás:

   a) A sorozat az 1; 2; 3; 4; 5; 5; 4; 3; 2; 1 számjegyek szakaszos ismétlődése. A sorozat 52. tagjáig öt ilyen csoport fordul elő, ez a sorozat első 50 tagját jelenti. **A sorozat 52. tagja a 6. csoport második tagja, vagyis a 2.**
   b) A sorozat első 47 tagja a fentiekben említett csoportok közül négyet tartalmaz, valamint az 5. csoport első hét tagját. Mivel egy csoport tagjainak összege 30, ezért az első négy csoport tagjainak összege $4 \cdot 30 = 120$. Az 5. csoport első hét tagjának összege $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 + 4 = 24$, **tehát az első 47 tag összege $\mathbf{120 + 24 = 144}$.**

Levelező Matematika Szakkör *2023/2024.*

DÖNTŐ

6. OSZTÁLY

1) A szabadságharc egyik csatájának kezdetekor a magyar hadsereg 100 ágyúval, az osztrák hadsereg 94 ágyúval rendelkezett. A csata során óránként 2 magyar ágyú és 5 osztrák ágyú semmisült meg. Mennyi idő múlva lesz a magyar ágyúk száma egyenlő az osztrák ágyúk számának a kétszeresével?

Megoldás:

Az magyar ágyúk száma, illetve az osztrák ágyúk számának kétszerese közötti különbség kezdetben $2 \cdot 94 - 100 = 88$. Ez a különbség óránként $2 \cdot 5 - 2 = 8$-cal csökken. **Tehát $\mathbf{88 : 8 = 11}$ óra múlva lesz a magyar ágyúk száma egyenlő az osztrák ágyúk számának a kétszeresével.**

2) Csaba és Dénes egy szabályos dobókockával háromszor dobnak és a dobott számokat egymás után leírva egy háromjegyű számot kapnak. A játékszabályt következőképpen állapítják meg: ha a kapott háromjegyű számban pontosan egyszer szerepel a 4-es számjegy, akkor mindenképpen Csaba nyer, függetlenül attól, hogy mi a másik két számjegy; Dénes pedig csak akkor nyerhet, ha a kapott számban pontosan két számjegy megegyezik. Melyiküknek van nagyobb nyerési esélye?

Megoldás:

Csaba abban az esetben nyerhet, ha például a százasok helyiértékén 4-es, a másik két helyiértéken pedig 4-től különböző számjegy szerepel. Ez összesen $5 \cdot 5 = 25$ –féleképpen lehetséges. Viszont az egyetlen 4-es számjegy három különböző helyiértéken szerepelhet, így Csaba $3 \cdot 25 = 75$ esetben nyerhet.
Dénes akkor nyerhet, ha pontosan két számjegy egyenlő és a harmadik számjegy nem 4-es. Tekintsük például azt az esetet, amikor a százasok és tízesek helyén ugyanaz a számjegy áll, az egyesek helyén pedig ezektől különböző (és nem 4-es) számjegy szerepel. Az olyan esetek száma, ahol a két egyforma számjegy nem 4-es, $5 \cdot 4 = 20$. Továbbá 5 olyan eset van, ahol a két egyenlő számjegy 4-es. Ez összesen 25 lehetséges eset. Viszont a két egyforma számjegynek a háromjegyű számon belül háromféle elrendezése lehetséges, ezért Dénes $3 \cdot 25 = 75$ esetben nyerhet.
A fentiekből következik, hogy a két fiúnak ugyanakkora a nyerési esélye.

3) András, Béla és Csaba futásban egymással versenyeztek. A verseny után így számoltak be egy közös barátjuknak:
Csaba: *András nem lett első.*
András: *Béla nem lett második.*
Béla: *Csaba nem lett sem első, sem harmadik.*
Később elárulták, hogy csak egyikük mondott igazat, ketten füllentettek. Ki hányadik helyen végzett?

Megoldás:

Ha Béla állítása igaz, akkor Csaba a második. Ekkor András állítása hamis, tehát Béla második. Ez ellentmondás, mivel két második helyezett van.
Ha András állítása igaz, akkor Béla vagy az első vagy a harmadik. Csaba állítása viszont hamis, tehát András az első, így Béla a harmadik. Béla állítása is hamis, tehát Csaba első vagy harmadik, ami ellentmondás, mivel ez a két hely már foglalt.
Tehát Csaba állítása igaz. Ezért András állítása hamis**, tehát Béla a második. Mivel András nem lett első (Csaba igaz állítása), ezért ő a harmadik. Az első helyezett pedig Csaba.**

4) Egy sorozat első tagja 15. A sorozatot úgy képezzük, hogy ha egy tagja páratlan, akkor 3-at adunk hozzá. Ha viszont a sorozat egyik tagja páros, akkor 2-vel osztjuk.
Határozzuk meg:
   a) a sorozat 38. tagját;
   b) a sorozat első 26 tagjának összegét.

Megoldás:

   a) A sorozat első hat tagja a 15; 18; 9; 12; 6; 3; 6; 3…. Tehát a sorozat következő tagjai a 6 és 3 szakaszos ismétlődéséből adódnak. Ezért az 5. tagtól kezdődően a páros sorszámú tagok 3-mal, míg a páratlan sorszámúak 6-tal egyenlők. **Tehát a sorozat 38. tagja 3.**
   b) A sorozat első 26 tagja a 15; 18; 9; 12 számokat, valamint 11-szer a 3-ast és 11-szer a 6-ost tartalmazza.
   Ezért a sorozat első 26 tagjának összege $\mathbf{15 + 18 + 9 + 12 + 11 \cdot 3 + 11 \cdot 6 = 153}$.

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001: 2000

Levelező Matematika Szakkör ***2023/2024.***

DÖNTŐ

7. OSZTÁLY

1) Bizonyítsd be, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő, amelyek különbsége osztható 10-zel!

Megoldás:

A négyzetszámok végződései a következőek lehetnek: 0; 1; 4; 5; 6; 9.
Mivel 7 számból választunk ki kettőt, ezért a skatulyaelv következtében biztosan lesz közülük kettő, amelyiknek a végződése ugyanaz. Ezek különbsége azonban 0-ra végződik, így osztható 10-zel. **Ezzel beláttuk az állítást.**

2) Fanni a zsebében levő két szem citromos és két szem málnás cukorkából kivesz kettőt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy különböző ízűek?

Megoldás:

A citromos cukrokat jelöljük A-val és B-vel, a málnásokat C-vel és D-vel. A két cukorka így az alábbi 6 féle lehet: AB; AC; AD; BC; BD; CD. Ebből kettő, az AB és a CD nem jó nekünk, így a kedvező lehetőségek száma 4. **A keresett valószínűség így $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.**

3) Hány olyan négyjegyű szám van, amely 25-re végződik és 9-cel osztható?

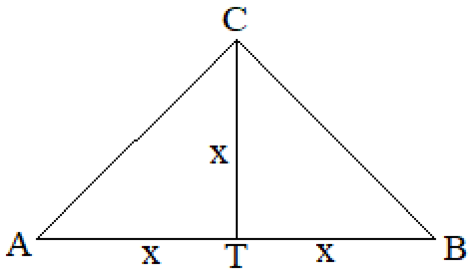
Megoldás:

Ha egy szám 9-cel osztható, akkor számjegyeinek összege is osztható 9-cel. 2 + 5 = 7, így az első két számjegy összege csak 2, vagy 11 lehet.
A 2 előállítása: 20; vagy 11 lehet.
A 11 előállítása: 29; 38; 47; 56; 65; 74; 83; 92 lehet.
Ez összesen 10 lehetőség. **Így összesen 10 db négyjegyű szám van, ami megfelel a feltételeknek.**

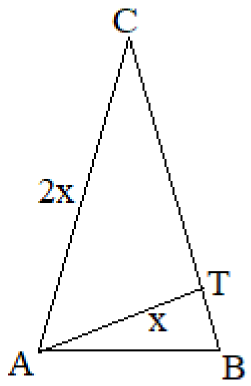
4) Mekkorák lehetnek annak a tengelyesen szimmetrikus háromszögnek a szögei, amelynek egyik oldala kétszerese a hozzátartozó magasságnak?

Megoldás:

Két eset van.
Az egyiknél az alap lesz a kétszerese a háromszög magaságának. Ekkor CTB háromszög egyenlőszárú és derékszögű, ezért B-nél lévő szöge 45^0.
Ekkor ABC háromszög szögei: 45^0; 45^0; 90^0.



A másik esetben a szárhoz tartozó magasság lesz fele akkora, mint a szár.
Ekkor ATC háromszög egy félszabályos háromszög, így C-nél lévő szöge 30^0.
Ekkor ABC háromszög szögei: 75^0; 75^0; 30^0.



Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

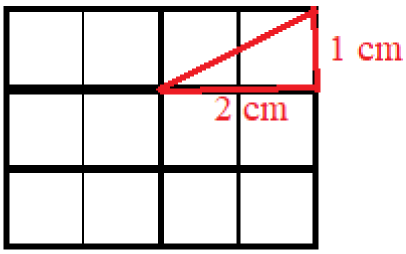
Levelező Matematika Szakkör *2023/2024.*

DÖNTŐ

8. OSZTÁLY

1) Egy 3 cm x 4 cm-es téglalapban felvettünk hét pontot. Mutassuk meg, hogy a pontok között van kettő, melyek távolsága legfeljebb $\sqrt{5}$ cm!

Megoldás:



A téglalapot bontsuk fel az ábrának megfelelően 6 db kisebb 1 cm x 2 cm-es téglalapra.
Egy kis téglalapon belül a Pitagorasz-tételnek megfelelően a legnagyobb távolság a két csúcs közötti $\sqrt{5}$ cm.
A hét pont közül a skatulyaelvnek megfelelően lesz legalább kettő, amelyik ugyanabba a téglalapba esik, így az ő távolságuk legfeljebb $\sqrt{5}$ cm.
Ezzel megmutattuk az állítás igazságát!

2) Két dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok
   a) szorzata 12;
   b) szorzata prímszám?

Megoldás:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

a) Az összes lehetőség száma 36.
A szorzat ezek közül 4-féleképpen lehet 12, így **a valószínűség:** $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

b) Prímszám a 2; 3; 5. Ezek a táblázatban 6 helyen fordulnak elő, ezért **a valószínűség:** $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

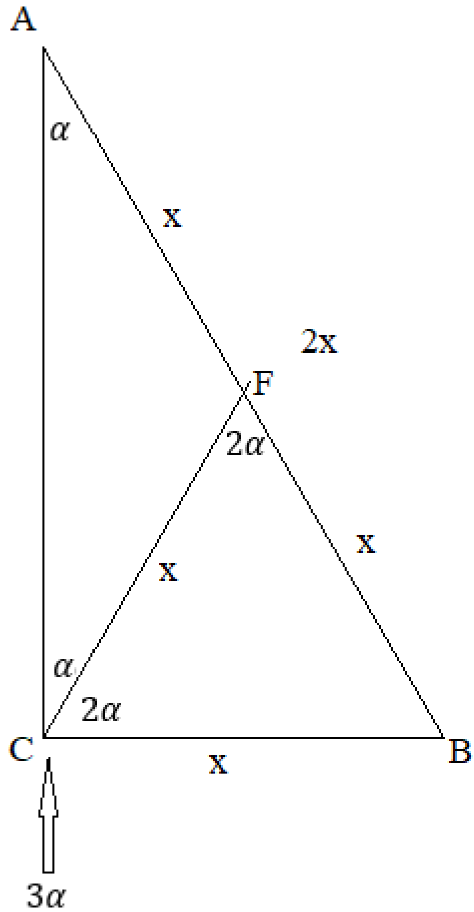
3) Hány olyan négyjegyű szám van, amely 16-ra végződik és 3-mal osztható?

Megoldás:

Egy szám akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek az összege is osztható 3-mal. Mivel 16-ra végződik, ezért az első két számból álló háromjegyű számnak 3-mal osztva 2 maradékot kell adnia. Az első ilyen szám a 11 (ami $4 \cdot 3 - 1$), az utolsó a 98 (ami $33 \cdot 3 - 1$). **Ezért 30 db ilyen szám van.**

4) Egy háromszög legnagyobb oldalának hossza kétszerese a legkisebb oldal hosszának és a legnagyobb oldallal szemközti szög háromszorosa a legkisebb oldallal szemközti szögnek. Hány fokos a háromszög legkisebb szöge?

Megoldás:



Jelöljük a legkisebb szöget α-val az A csúcsnál és 3α-val a C csúcsnál. CB oldal legyen x és AB oldal legyen 2x.
A C csúcsnál lévő szöget CF szakasszal bontsuk α és 2α nagyságú részekre.
Ekkor ACF háromszög F-nél lévő külső szöge 2α nagyságú lesz.
Így BCF háromszög egyenlő szárú. BC = BF = x.
Mivel BF = x, ezért AF = x.
ACF háromszög is egyenlőszárú, ezért CF = x.
CBF háromszög oldalai egyenlőek, ezért szabályos, így $2\alpha = 60^0$. Ebből $\alpha = 30^0$; és $3\alpha = 90^0$ következik.
A háromszögünk szögei : 30^0; 60^0; 90^0, tehát félszabályos.
A legkisebb szög: $\alpha = 30^0$