Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör ***2023/2024. 1. feladatsor***
5.-6. évfolyam

HOZZÁRENDELÉSEK ALKALMAZÁSA

A mindennapi életben gyakran történik meg, hogy egy mennyiséghez egy vagy több másik mennyiséget rendelünk. Például egy adott áru vásárlása esetén a vásárolt mennyiséghez hozzárendeljük az árat, amit érte fizetünk. Ugyanakkor, egy adott évszámhoz hozzárendelhetjük egy bizonyos egyén életkorát, amellyel az illető az adott évben rendelkezik. Továbbá egy bizonyos időpillanathoz hozzárendelhetjük egy test hőmérsékletét vagy sebességét, amellyel az adott pillanatban rendelkezik. Ilyen módon megfeleltetéseket végzünk két mennyiség között, így az előző példákból kiindulva beszélhetünk mennyiség-ár, évszám-életkor, időpillanat-hőmérséklet vagy időpillanat-sebesség megfeleltetésekről. A megfelelő értékpárokat táblázatba foglalhatjuk, így különböző következtetéseket tudunk levonni a megfeleltetett mennyiségek alakulására vonatkozóan. Ezeknek a vizsgálatával különböző szöveges feladatokat is megoldhatunk, amint a következőkben kiderül.

Mintapéldák

1.) Egy kereskedő a következő eladási stratégiát választja. Az első 100 darabot 20 eurós egységáron, a következő 100 darabot 19 eurós egységáron adja el. És így tovább, minden 100 darab eladása után az egységárat egy euróval csökkenti.
   a) Legfeljebb hány darab terméket tervezett eladni?
   b) Hány darabot sikerült eladni, ha a bevétele 6652 euró lett?

   Megoldás:

   a) Mivel minden 100 termék eladása esetén az egységárat egy euróval csökkenti, ezért a tizenkilencedik árcsökkentés után egy termék már csak egy euróba kerül. A következő árcsökkentésnek már nincs értelme, mivel a terméket ingyen „árusítaná”. Tehát összesen $20 \cdot 100 = 2000$ terméket tervezett eladni.
   b) Kezdetben eladott 100 darab 20 eurós, majd 100 darab 19 eurós, majd 100 darab 18 eurós terméket, így a bevétele $20 \cdot 100 + 19 \cdot 100 + 18 \cdot 100 = 5700$ euró lett. A maradék $6652 - 5700 = 952$ eurót a 17 eurós termékek árusításából kapta. Tehát $952 : 17 = 56$ darab 17 eurós terméket adott el. Így összesen $3 \cdot 100 + 17 = 317$ terméket sikerült eladni.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

2.) Andrásnak 200 eurója, Bélának 120 eurója van. András naponta elkölt 4 eurót, Béla pedig 3 eurót. Hány nap múlva lesz az András pénze a Béla pénzének a háromszorosával egyelő?

Megoldás:

Készítsünk egy értéktáblázatot, amelyben a fiúk zsebpénzének alakulását szemléltetjük.

Napok száma	0	1	2	3	32
András pénze	200	196	192	188	72
Béla pénze	120	117	114	111	24
Béla pénzének a háromszorosa	360	351	342	333	72

Mivel azt a napot keressük, amikor az András pénze a Béla pénzének a háromszorosával egyelő, ezért a táblázatnak egy olyan oszlopát akarjuk megtalálni, amelyben ez a két mennyiség (a táblázat második és negyedik sorának tartalma) megegyezik. Megfigyelhető, hogy az eltelt napok függvényében az András pénze naponta 4-gyel, míg a Béla pénzének a háromszorosa 9-cel csökken. Így a két mennyiség közötti különbség naponta 5-tel csökken. Kezdetben ez a különbség $360 - 200 = 160$ volt, ezért $160: 5 = 32$ napnak kell eltelnie. A táblázat utolsó oszlopában látható, hogy a 32. napon András pénze tényleg a Béla pénzének a háromszorosával egyenlő.

3.) Melyik az a szám, amelynek a háromszorosa 18-cal nagyobb, mint a nála 5-tel nagyobb szám kétszerese?

Megoldás:

Próbáljunk elkészíteni egy táblázatot, amely a feladatban szereplő számadatok változását tartalmazza, ahol Δ-val (deltával) a gondolt számot jelöljük:

Δ	1	2	3	4	5
$3 \cdot \Delta$	3	6	9	12	15
$\Delta + 5$	6	7	8	9	10
$2 \cdot (\Delta + 5)$	12	14	16	18	20

A táblázat második oszlopában látható, hogy a $3 \cdot \Delta$ értéke (a gondolt szám háromszorosa) 9-cel kevesebb, mint a $2 \cdot (\Delta + 5)$ értéke (a gondolt számnál 5-tel nagyobb szám kétszerese). A táblázat második, illetve negyedik sorából kitűnik, hogy a $3 \cdot \Delta$ értéke mindig hárommal, míg a $2 \cdot (\Delta + 5)$ értéke 2-vel változik. Tehát oszloponként haladva, a második oszloptól kezdődően $9 + 18 = 27$-et kell lépnünk ahhoz, hogy a $3 \cdot \Delta$ értéke 18-cal nagyobb legyen a $2 \cdot (\Delta + 5)$ értékénél. Így a gondolt szám 28-cal egyenlő és ez megfelel a feladat feltételeinek is.

4.) Egy óvónő a gyermekek között cukorkát szeretne szétosztani. Ha mindegyik gyermeknek 4 cukorkát adna, akkor 16 cukorka hiányozna. Ezért mindegyik gyereknek 3 cukorkát ad, így 8 cukorka marad. Hány cukorkája volt az óvónőnek? Hány gyermek között osztotta szét?

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Megoldás:

Első módszer:

Mivel a cukorkákat hármasával osztva 8 cukorka megmarad, ezért ezeket is szét lehet osztani így 8 gyerek négy cukorkát kapna. Viszont azt is tudjuk, hogy ebben az esetben 16 olyan gyerek lesz, akinek nem jut a negyedik cukorkából (mivel a cukorkákat négyesével osztva 16 gyerek nem kapna cukorkát). Ezért összesen $16 + 8 = 24$ gyerek van. A cukorkák száma a két különböző osztogatási módszer szerint számolva $24 \cdot 3 + 8 = 24 \cdot 4 - 16 = 80$.

Második módszer:

Egy táblázatot készítünk, amelynek a második és harmadik sora a cukorkák számát tartalmazza a két különböző osztási módszer esetében, figyelembe véve a feladat feltételeit.

Gyerekek száma	5	6	7	8	24
3 cukorka/gyerek	23	26	29	32	80
4 cukorka/gyerek	4	8	12	16	80

A második sorban a cukorkák száma hárommal, míg a negyedik sorban néggyel növekszik, vagyis a két sorban lévő számok közötti különbség minden egyes lépésben eggyel csökken. Mivel kezdetben (5 gyerek esetében) a különbség $23 - 4 = 19$ volt, ezért 19 lépésre van szükség ahhoz, hogy a különbség nullára csökkenjen (mivel mindkét osztási módszer esetében a cukorkák száma egyenlő), tehát $5 + 19 = 24$ gyerek van. Az utolsó oszlopból az is kitűnik, hogy a cukorkák száma 80.

Gyakorló feladatok

1.) Zoli leírt két pozitív egész számot. Észrevette, hogy az egyik ötszöröse a másiknak, az összegük pedig 12-vel nagyobb a kisebb szám háromszorosánál. Melyik két számot írta le Zoli?

2.) Egy kereskedő egy termék árusítása közben a következő érdekes felfedezésre jutott. Ha a termék darabját egy euróért árusítja, akkor egy nap alatt 46 terméket bír eladni. Viszont ha a termék árát egy euróval emeli, akkor naponta csak 42 terméket, ha két euróval, akkor naponta csak 38 terméket bír eladni. És így tovább, minden egyes esetben, ha a termék árát egy euróval növeli, akkor a naponta eladott mennyiség 4 darabbal csökken. Milyen árat kérjen egy darab termékért ahhoz, hogy a napi bevétele a lehető legnagyobb legyen?

3.) András most 5 éves, anyukája pedig 25 éves. Hány éves lesz András, amikor az anyukája háromszor olyan idős lesz, mint ő?

4.) Egy vállalatnál a nők száma a férfiak számának a háromszorosával egyenlő. A vállalathoz érkezett még 21 férfi és 8 nő. Készítsünk táblázatot a nők, illetve férfiak lehetséges számáról a végső helyzetben. Írjuk fel x segítségével ezeket a mennyiségeket, ahol x a férfiak kezdeti számát jelenti. Tudjuk, hogy a végső helyzetben a nők száma a férfiak számának a kétszeresével egyenlő. Hány férfi és hány nő volt kezdetben a vállalatnál?

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Kitűzött feladatok

1.) Egy iskolában a Zöldfülűek Báljára üdítőt rendelnek. A Kóla webáruházban egy üveg üdítő ára 500 Ft, a kiszállítás egyszeri ára a megrendelt darabszámtól függetlenül 4500 Ft. A Traubi webáruházban egy ilyen üdítő ára 520 Ft, de a megrendelt darabszámtól független kiszállítás egyszeri díja itt csak 3280 Ft. Hány üdítő megrendelése esetén kerül ugyanannyiba a vásárlás, függetlenül attól, hogy melyik webáruházból rendeljük?

2.) Melyik az a szám, amelynek a négyszerese 2-vel kisebb, mint a nála 3-mal nagyobb szám háromszorosa?

3.) Józsi bácsi egy őstermelő, akinek 148 birkája és 116 disznója van. Azt tervezi, hogy minden héten a vásárban elad 2 birkát és 3 disznót. Hány hét múlva lesz Józsi bácsinak kétszer annyi birkája, mint disznója?

4.) András egy kalandregényt olvas. Ha naponta 20 oldalt olvasna el, a könyvet 9 nappal hamarabb olvasná ki, mintha naponta 15 oldalt olvasna. Hány oldalas a könyv?

Beküldési határidő:	**2023.11.18.**
Postai cím:	Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ 2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Skatulyaelv

Ha valakitől azt kérjük, hogy az előtte lévő 4 darab dobozba helyezzen el 5 darab golyót, és fogalmazza meg, hogy amikor ezt teszi, mit tart érdekesnek, akkor valószínűleg nevetségesen egyszerűnek érzi a kérésünket, és azonnal válaszol.

Lehet, hogy a válasza az lesz: „Az egyik dobozba kettőt teszek.” Ha mi minden elhelyezési lehetőségre gondolunk, akkor óvatosabban fogalmazunk, hiszen nem kell feltétlenül egy dobozba két golyót tennünk. Az is lehet, hogy mind az 5 golyót egy dobozba tesszük, az is lehet, hogy két dobozba 2-2 golyót teszünk, egybe 1 darabot, és egy dobozt üresen hagyunk.

Ha az elhelyezési lehetőségek lényegét röviden akarjuk megfogalmazni, akkor azt mondjuk: „**Legalább** egy dobozba **legalább** két golyót kell tennünk.”

Ez teljesen magától értetődő megállapítás, helyességében senki sem kételkedhet. A matematikában egy magától értetődő állításra azt mondjuk, hogy triviális állítás. A triviális latin szó. Eredete a trivium szó, amely keresztutat jelent. Innen a triviális szó szerinti értelme: útszéli, közönséges. Később módosult a jelentése: a trivium melletti iskolákban tanított, azaz a mindenki számára alapvető fontosságú ismeretek jelzője lett. Ma a tudományos nyelvben a közismert, magától értetődő, általánosan elfogadott megállapítások jelzőjeként használjuk.

Az elhelyezési feladatot általánosabban így fogalmazhatjuk meg: Ha n darab dobozba $n+1$ darab tárgyat teszünk, akkor legalább egy dobozba legalább két tárgyat kell elhelyeznünk. Ezt a magától értetődő állítást „skatulyaelv”-nek nevezzük. Felhasználására szükség lehet összetettebb matematika feladatok megoldásában is.

Ugyanilyen magától értetődő az is, hogy ha 5 dobozba 16 darab golyót akarunk elhelyezni, akkor legalább egy dobozba legalább 4 golyót kell tennünk.

Ha n darab dobozunk van, akkor is megfogalmazhatunk ahhoz hasonló állítást, amelyet 5 doboz és 16 golyó esetén már megtettünk. Gondoljunk arra, hogy az n doboz mindegyikébe k darab golyót teszünk, ez összesen $n \cdot k$ golyó, és ha ennél 1-gyel több golyót, azaz $n \cdot k + 1$ darab golyót akarunk elhelyezni, akkor legalább egy dobozba legalább $k+1$ darabot kell tennünk.

A skatulyaelv két megfogalmazása olyan, amelyre gyakran hivatkozunk:

1. Ha n darab fiókban legalább $n+1$ tárgyat akarunk elhelyezni, akkor legalább egy fiókban legalább két tárgyat kell tennünk.
2. Ha n fiókba legalább $n \cdot k + 1$ darab tárgyat akarunk tenni, akkor legalább egy fiókba k darabnál többet kell tennünk.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

Mintapéldák

1.) Egy iskolába 367 diák jár. Mutassuk meg, hogy van legalább két diák, akik azonos napon ünneplik a születésnapjukat

Megoldás:

Jelöljük az év minden napját egy fiókkal! Mivel minden évben 365 vagy 366 nap van attól függően, hogy normális vagy szökőév van-e, így a fiókok száma legfeljebb 366. Rakjunk minden diákot a születésnapjának megfelelő fiókba! Így a megoldás következik a skatulyaelvből.

2.) Adott 4 természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettő azonos maradékot ad 3-mal osztva!

Megoldás:

A lehetséges maradékok 3-mal történő osztás esetén 0, 1 és 2. Tekintsünk 3 fiókot, amik hozzá vannak rendelve a különböző maradékokhoz. Tegyük a 4 természetes számot a fiókokba a maradékaik szerint. Így a megoldás következik a skatulya-elv alapján.

3.) Egy diáknak 9 feladatot kell megoldania egy hét alatt. Magyarázzuk meg, miért igaz, hogy a diáknak legalább az egyik napon nem kevesebb, mint 2 feladatot kell megoldania!

Megoldás:

A hét minden napjához hozzárendelünk egy fiókot. A fiókok száma így összesen 7. Válasszuk ki bármelyik fiókot! Amit bele kell tennünk, az az a feladat, amit a diák az adott fiókhoz rendelt napon oldott meg. Ugyanígy végigmegyünk az összes többi fiókon is és alkalmazzuk a skatulya-elvet. Ez elegendő a magyarázathoz. Az eredmény hasonló lesz, ha a feladatok száma 8, 10 vagy több.

4.) Adott 5 természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy a számok közti különbségek közül legalább egy osztható 4-gyel!

Megoldás:

A lehetséges maradékok 4-gyel való osztás esetén 0, 1, 2 és 3. Tekintsünk 4 fiókot, hozzárendelve egy-egy osztási maradékhoz. A skatulyaelvből következik, hogy legalább 2 szám ugyanabba a fiókba fog kerülni. Mivel ezek 4-gyel való osztási maradéka megegyezik, a különbségük osztható lesz 4-gyel és így kész is a megoldás.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

Gyakorló feladatok

1.) Hat osztálytárs részt vesz a “találjuk el a célt” versenyben. Mutassuk meg, hogy közülük legalább kettőnek azonos számú találata van, ha a találatok száma összesen 14!

2.) Tizenhat csapat játszik egy futball tornán, ahol mindenki játszik mindenki ellen. Bizonyítsuk be, hogy minden meccs után van legalább két csapat, akik ugyanannyi meccset játszottak!

3.) Adott egy 5×5-ös négyzet, ami 25 egységnégyzetre van osztva. Tetszőleges módon 26 pont van bejelölve a négyzeten. Mutassuk meg, hogy legalább két pont azonos egységnégyzetre fog esni!

4.) Egy osztályban 25 diák tanul. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább 3 ugyanabban a hónapban született!

Kitűzött feladatok

1.) 50 pont van bejelölve egy 7 cm oldalhosszúságú négyzeten. Bizonyítsuk be, hogy a pontok közül legalább 2 lefedhető egy 1 cm oldalhosszúságú négyzettel!

2.) Hét ember egyszerre vásárol egy boltban. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettőnek azonos számú ismerőse van a többiek közül!

3.) Egy falánk ember 10 édességet evett meg egy cukros dobozból, amiben 3-féle édesség van. Találjuk meg n legnagyobb lehetséges értékét, amiről biztosan állítható, hogy a falánk ember legalább n édességet evett meg egy azonos fajtából!

4.) 40 diák versenyezik egymással 6 feladat megoldásán egy kétnapos matematikai olimpián. Bizonyítsuk be, hogy mire véget ért a verseny közülük legalább hat ugyanannyi feladatot oldott meg!

Beküldési határidő: **2023.11.18.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre