Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör ***2023/2024. 3. feladatsor***
5.-6. évfolyam

A gondolkodás tudománya

A matematika számos vélemény szerint nem a számokkal végzett műveleteknek, hanem inkább a gondolkodásnak a tudománya. A matematikai feladatok és problémák megoldása olyan képességeket fejleszt, amelyek alapvető fontossággal bírnak a logikus és rendszerezett gondolkodásban. Tehát a matematika nem csupán a műveletek és képletek összességét jelenti, hanem magába foglalja a komplex problémamegoldást, az elvont gondolkodást, a logika alkalmazását, valamint a kritikai gondolkodást is. A matematikai problémák megoldása során alkalmazott ötletek általában alkalmazhatók más, matematikától távolabb álló tudományokban és élethelyzetekben is. Annak ellenére, hogy a matematika egy nagyon precíz tudomány, a feladatok megoldása sok esetben leleményességet és kreativitást, valamint a szokványos módszerektől való elrugaszkodást igényel. Így a matematikai gondolkodás jelentősen hozzájárul a kreatív gondolkodási készségek fejlődéséhez is.

Mintapéldák

1.) András 2023 szilveszterének estéjén három korongot tesz az asztalra. Ezek színe, ebben a sorrendben, piros, fehér és zöld. Elhatározta, hogy két szomszédos korong helyzetét egymással felcseréli, majd ezt a műveletet megismétli 2023-szor. Előfordulhat-e, hogy az utolsó csere után mindhárom korong a kezdeti sorrendben lesz elhelyezve?

Megoldás:

A három korongnak hatféle elrendezése lehetséges, ezek a következők:
P F Z   P Z F   F Z P   F P Z   Z P F   Z F P
Ezeket az elrendezéseket kétféleképpen csoportosítjuk úgy, hogy az első csoportba a PFZ, FZP, ZPF, a másodikba pedig a PZF, ZFP és FPZ elrendezések kerülnek. Megfigyelhető, hogy az András által végrehajtott helycserék után az első, illetve a második csoportban lévő sorrendek váltakozva követik egymást. Ezért páratlan számú átrendezés után az asztalon a második csoport valamelyik lerendezése fog szerepelni, ezek között viszont nem szerepel a PFZ. Tehát 2023 átrendezés után nem lehetséges, hogy mindhárom korong az eredeti helyzetben legyen.

2.) Korongokat címkézünk 1-től 50-ig a következőképpen: egyre 1-est, kettőre 2-est, háromra 3-ast, és így tovább, ötvenre 50-est írtunk. Az így megjelölt $1+2+...+50=1275$ korongot egy dobozba tesszük, majd onnan becsukott szemmel kiveszünk néhányat. Hány korongot kell kivennünk ahhoz, hogy ezek között biztosan legyen legalább 10 azonos címkéjű?

Megoldás:

Belátható, hogy az 1-es, 2-es, … , 9-es számú korongok egyikéből sincs 10 egyforma. A legkedvezőtlenebb esetet vizsgálva, éppen ezeket a korongokat kihúzva $1+2+...+9=45$ korongot kihúzva még biztosan nem lesz 10 egyforma. A további húzások során a legkedvezőtlenebb az lenne, ha a 10-es, … , 50-es számozású korongok mindegyikéből 9-9 darabot vennénk ki, ez pedig $41\cdot 9=369$ korongot jelent. Tehát összesen $369+45=414$ korongot kell kihúzva még nem biztos, hogy lesz 10 azonos címkéjű. Viszont a következő húzásnál már biztosan lesz 10 egyforma számozású. Ezért 415 korongot kell kihúznunk ahhoz, hogy a kihúzott korongok között 10 egyforma számozású legyen.

3.) Egy sorozatot első tagja 8. A sorozat további tagjait úgy kapjuk meg, hogy az mindig az előző taghoz felváltva hozzáadunk négyet, illetve kivonunk hármat. Határozzuk meg a sorozat első 84 tagjának összegét!

Megoldás:

Kezdetben felírjuk a sorozat első néhány tagját a következőképpen:
8; 12; 9; 13; 10; 14; 11; 15; 12; 16;…..
Megfigyelhetjük, hogy a sorozat páratlan sorszámú tagjait sorba rendezve a következő sorozatot kapjuk:
8; 9; 10; 11; ….
Hasonlóan a páros sorszámú tagok felírása után a következő sorozatot kapjuk:
12; 13; 14;15; ….
Ahhoz, hogy az eredeti sorozat első 84 tagjának összegét kiszámítsuk, a fentiekben említett mindkét részsorozat esetében kiszámítjuk az első 42 tag összegét, majd az így kapott számokat összeadjuk.
Elsőként kiszámítjuk, hogy a 8; 9; 10; 11; …. sorozat 42. tagja $8+41=49$. Tehát ennek a sorozatnak a tagjai egyesével növekedve a 42. tagig a következőképpen alakulnak:
8; 9; 10; 11; ….; 46; 47; 48; 49.
Megfigyelhető, hogy a tagokat a következőképpen kettesével párokba rendezve, minden pár esetében ugyanazt az összeget kapjuk $8+49=9+48=10+47=\cdots=57$. Mivel a sorozat 42 tagjáról van szó, ezért $42:2=21$ számpárt alakíthatunk ki, ezeknek összege pedig $21\cdot 57=1197$.
Hasonlóan járunk el a páros sorszámú tagok esetében is. Ebben az esetben a sorozat 42. tagja $12+41=53$, így a 42 tag összege $(12+53)\cdot 21=1365$.
A páratlan, illetve páros sorszámú tagok összegeit összeadva következik, hogy az eredeti sorozat első 84 tagjának összege $1197+1365=2562$.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

4.) A legenda szerint Thetisz nimfa esküvőjén valamennyi görög isten részt vett. Eris, a viszály istennője ki is használta az alkalmat egy kis bajkeverésre. Egy aranyalmát adott a vendégseregnek azzal a feltétellel, hogy a jelenlevők közül a legszebbé legyen. Héra, Pallasz Athéné és Podagré mind maguknak követelték az almát. Zeusz főisten Párisra, a trójai királyfira bízta a döntést. Az istennők a következő kijelentéseket tették:
Podagré: *Én vagyok a legszebb!*
Pallasz Athéné: *Podagré nem a legszebb!*
Héra: *Én vagyok a legszebb!*
Podagré: *Héra nem a legszebb!*
Pallasz Athéné: *Én vagyok a legszebb!*
Mi volt Páris döntése, ha tudta, hogy csak a legszebb istennő minden kijelentése igaz, a többié pedig mind hamis?

Megoldás:

Vizsgáljuk meg egyenként a kijelentéseket. Ha Héra igazat mondott, akkor Palasz Athéné első kijelentése is igaz lenne, ami nem lehetséges, mivel csak az egyik istennő kijelentése igaz. Így ellentmondáshoz jutottunk. Tehát Héra kijelentése hamis, így nem ő a legszebb. Ebben az esetben viszont Podagré második kijelentése igaz, ami azt jelenti, Podagré mond igazat, tehát ő a legszebb. A fentiek értelmében ellenőrizhető, hogy Pallasz Athéné mindkét kijelentése hamis, tehát ő sem lehet a legszebb.
Ezért Páris az aranyalmát Podagrénak adta.

Gyakorló feladatok

1.) Ki lehet-e tölteni egy 5x5-ös táblázatot az 1 és –1 számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban más legyen a számok összege? Ha igen, akkor adjunk meg egy lehetséges kitöltést!

2.) Hét gyereknek együtt 100 focistás matricája van, mégpedig úgy, hogy egyiküknek sincs azonos számú matricája. Igaz-e, hogy van közöttük három gyerek, akiknek együtt legalább 50 matricája van? Válaszodat indokold!

3.) A táblán 60 darab 5-ös és 60 darab 6-os számjegy van. Ezek közül találomra letörlünk két számjegyet. Ha ezek egyenlők, akkor egy 6-ost, ha különbözők, akkor egy 5-öst írunk a táblára. Milyen számjegy marad a századik törlés után? Válaszodat indokold!

4.) András, Béla és Csaba felesége Anna, Bözsi és Csilla, de nem feltétlenül ebben a sorrendben. Mindegyik házaspárnak van egy gyereke. A gyerekek neve Dalma, Elemér és Ferenc. Állapítsuk meg, hogy kik tartoznak egy-egy családba, ha tudjuk a következőket:
- Bözsi és Csaba gyerekei együtt fociznak az iskola fiúcsapatában;
- András fiát nem Elemérnek hívják;
- Béla feleségét nem Csillának hívják.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Kitűzött feladatok

1.) Egy fehér, egy fekete, egy piros, egy kék és egy zöld dobozban ugyanilyen színű golyók vannak. A golyók száma összesen 10, minden említett színből két-két golyó van. Minden dobozban két-két golyó van. Melyik dobozban milyen színű golyók vannak, ha tudjuk, hogy:

  a) egyik golyó sincs a vele azonos színű dobozban;
  b) a piros dobozban nincs kék golyó;
  c) a fehér vagy a fekete dobozba egy piros és egy zöld golyó került;
  d) a fekete dobozban egy kék és egy zöld golyó van;
  e) az egyik dobozban egy fehér és egy kék golyó van;
  f) a kék dobozban van egy fekete golyó.

2.) Józsi bácsi a piacon vásárolt egy tyúkot. Miután a tyúk tojt két tojást, a tyúkot megették vacsorára, a tojásokat pedig a keltetőgépbe tették. Józsi bácsi elhatározta, hogy amennyiben a tojásból kakas kel ki, azt felnevelik és megeszik. Amennyiben viszont a kikelt csibéből tyúk lesz, akkor azt addig nevelik, amíg két tojást nem tojik és utána a tyúkot megeszik. A két tojást pedig szintén a keltetőgépbe teszik. Ez így ment éveken keresztül, míg egyszer azt vette észre, hogy csak kakasok maradtak, és természetesen ezeket is megették. Ezek után összeszámolta, hogy összesen 2023 kakast ettek meg. Hány tyúkot ettek meg Józsi bácsiék?

3.) A táblára felírjuk a természetes számokat 1-től 2023-ig. Azzal szórakozunk, hogy letörölünk két tetszőleges számot, és helyettük az összegüket írjuk fel. Ezt addig ismételjük, ameddig egy szám marad a táblán. Páros vagy páratlan ez a szám? Válaszodat indokold!

4.) Egy sorozatot úgy képezünk, hogy növekvő sorrendben leírjuk azokat a pozitív egész számokat, amelyek 5-tel való osztási maradéka 3 vagy 4. Határozzuk meg a sorozat első 78 tagjának összegét!

Beküldési határidő: **2024.02.10.**
Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

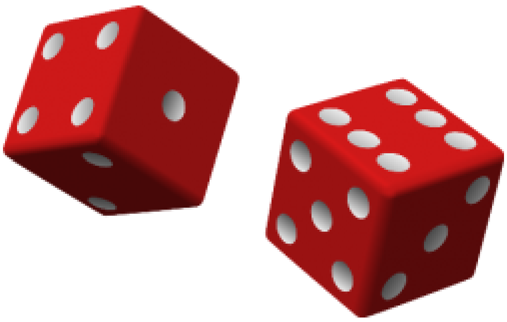
Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör *2023/2024. 3. feladatsor*
7.-8. évfolyam

Kombinatorika

A valószínűségszámításnál a kedvező esetek és az összes eset számát is valamilyen, a kombinatorikában használatos képlettel, művelettel, gondolkodásmóddal kell meghatároznunk. A kombinatorika a matematika azon területe, amely azzal foglalkozik, hogy egy halmaz elemeiből valamilyen szabály alapján kiválasszon, sorrendbe rendezzen dolgokat (általában számokat), valamint a dolgok megszámlálásával foglalkozik. A kombinatorika tulajdonképpen arra a kérdésre válaszol, hogy: „*hányféleképpen lehet …?*”.
Kombinatorikát használunk szerencsejátéknál és sporteseményeknél. Például lóversenynél indulás előtt kiszámoljuk, hányféle sorrendben futhatnak be a lovak. Vagy kiszámoljuk, hányféleképpen sorsolhatnak ki focicsapatokat egymás ellen. A kombinatorikában két fontos szempont van: az adott dolgokat sorba rendezzük, vagy kiválasztunk közülük. A kombinatorika megértéséhez további fogalmakat kell megtanulnunk.



Permutáció, Kombináció és Variáció. Nézzük meg, melyik mit jelent!

Permutációnak azt nevezzük, amikor az összes dolgot sorba rendezzük. Például: A gyerekek tornaórán tornasorba rendeződnek.

Kombinációnak nevezzük azt a szituációt, amikor úgy választunk ki dolgokat, hogy nem számít a kiválasztás sorrendje. Kombináció esetén tudjuk, hogy pontosan hány elemünk van, és ezekből kell adott számú elemet (amit a feladat ad meg) kiválasztanunk úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem fontos. (Tehát mindegy, hogy hova tesszük az adott elemeket vagy embereket, mert nincs megadva a pontos helyük.) Például: 12 fiúból kiválasztunk egy 6 fős focicsapatot.

Variációnak pedig azt nevezzük, amikor kiválasztunk és sorba rendezünk néhány dolgot, tehát számít a sorrendjük. Például 10 gyerek vesz részt a futóversenyen és a dobogón állókra vagyunk kíváncsiak.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

Nézzünk egy példát kombinációra!

Egy 26 fős osztályban a tanárnő 3 db 5000 Ft értékű könyvutalványt sorsol ki. Hányféleképpen kaphatják meg a gyerekek az ajándékokat? (Mindenki csak egy ajándékot kaphat.) Az első könyvutalványt még 26 diák kaphatja meg. A másodikat már csak 25, a harmadikat már csak 24. Ez összesen: **26 · 25 · 24 = 15600** lehetőség.

De mivel a könyvutalványok ugyanolyanok, ezért ezeket más sorrendben kisorsolva is ugyanazt az eredményt kapjuk. Ezért az összes lehetőséget el kell osztani a 3 könyvutalvány sorrendjeinek a számával, ami **3 · 2 · 1 = 6.**

Így a megoldás: $\frac{15\,600}{6} = 2600$

<u>Mintapéldák</u>

1.) Hányféleképpen lehet sorba rakni egy fehér, egy zöld, egy kék, egy piros és egy sárga golyót?

<u>Megoldás</u>:

Az első helyre 5 színből választhatunk, a másodikra a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ból stb., azaz összesen $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ = **120 lehetőség van.**

2.) Hányféleképpen lehet sorba rakni egy fehér, két zöld és három kék golyót?

<u>Megoldás</u>:

Ha mind a 6 golyó különböző színű lenne, akkor $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ lehetőségünk volna. A két zöld golyót $2\cdot1 = 2$, a három kéket pedig $3\cdot2\cdot1 = 6$ -féleképpen lehet sorba rakni. Mivel az azonos színűeket egyformának tekintjük, az egymás közötti sorrendjeiket nem különböztetjük meg, tehát a 720 lehetőséget 2-vel, ill. 6-tal el kell osztani, azaz összesen $720/(2\cdot6)$ = **60 lehetőség van.**

3.) Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha minden könyv különböző, és mindenki csak egy könyvet kaphat?

<u>Megoldás</u>:

Az első könyvet a 10 ember közül bárkinek adhatjuk, a második könyvet a maradék 9, a harmadikat a maradék 8 közül bármelyiknek stb., azaz összesen $10\cdot9\cdot8\cdot7$ = **5040 lehetőség van.**

4.) Egy 10 tagú társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás történik?

<u>Megoldás</u>:

1. megoldás: az első ember 9 másikkal fog kezet, a második 8 emberrel (az elsővel való kézfogását az első embernél már beszámítottuk), a harmadik 7 emberrel stb., azaz összesen 9+8+7+6+5+4+3+2+1 = **45 kézfogás történik.**

2. megoldás: minden ember 9 másikkal fog kezet, ez összesen $9\cdot10 = 90$. Így azonban minden kézfogást duplán számolunk, tehát kettővel el kell osztani, azaz összesen **45 kézfogás történik.**

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

Gyakorló feladatok

1.) Egy 12 csapatos labdarúgótornán hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón?

2.) Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha minden könyv különböző, és mindenki több könyvet is kaphat?

3.) Hány 4 jegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha mindegyiket többször is felhasználhatom?

4.) Hány 4 jegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek egyszeri felhasználásával?

Kitűzött feladatok

1.) Van 6 db számkártyánk.

0	3	2	2	1	4

Hány 6 jegyű szám készíthető a kártyák egymás mellé helyezésével?

2.) Hány 5 jegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből, ha a számjegyeket akár többször is felhasználhatom?

3.) Hány 5 jegyű 3-mal osztható szám készíthető az 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával, ha egyiket sem lehet egynél többször felhasználni?

4.) Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestése létezik a házsornak, ha 4-féle festékünk van? (Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

Beküldési határidő: **2024.02.10.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre