Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2022/2023. 4. feladatsor**
5.-6. évfolyam

ÖSSZEFÜGGÉSEK, KAPCSOLATOK, TERVEZÉSEK

A különböző kapcsolatok és összefüggések vizsgálata napjainkban a matematika egyik leggyorsabban fejlődő ágát képezi. A tervezések a különböző logisztikai feladatok és problémák megoldásában játszanak szerepet. A különböző esetek szétválasztása, valamint az esetek és lehetőségek számának meghatározása nagy jelentőséggel bír a szervezéssel kapcsolatos feladatok megoldásában. Ezeknek a problémáknak a vizsgálatával a matematika olyan fejezetei foglalkoznak, mint például a kombinatorika és a gráfelmélet. Mivel jelenlegi világunkban a különböző kapcsolatrendszerek egyre bonyolultabbakká váltak, ezért az említett fejezetek tanulmányozása kiemelt jelentőséggel bír.

Mintapéldák

1.) Egy körmérkőzéses bajnokságon 12 csapat vett részt, minden csapat mindegyikkel egyszer játszott. Egy-egy mérkőzésen a győztes 3 pontot, a vesztes 0 pontot kapott, döntetlen esetén pedig 1-1 pontot kaptak a csapatok. A 12 csapat végül összesen 183 pontot szerzett. Összesen hány mérkőzésre került sor? Ezek közül hány végződött döntetlenre?

Megoldás:

Mivel minden csapat 11 mérkőzést játszott **ezért összesen $\mathbf{12 \cdot 11 : 2 = 66}$ mérkőzésre került sor** (azért osztunk kettővel, mivel előzőleg minden mérkőzést kétszer számoltunk). Ha egy mérkőzés sem végződött volna döntetlenre, akkor a csapatok összesen $66 \cdot 3 = 198$ pontot szereztek volna, mivel minden ilyen mérkőzés 3 pontot jelent. Viszont a 66 mérkőzésen a csapatok csak 183 pontot szereztek. Ez abból adódik, hogy minden egyes döntetlen mérkőzés csak egy-egy pontot (vagyis összesen két pontot) jelent, **ezért összesen $\mathbf{198 - 183 = 15}$ döntetlen mérkőzésre került sor.**

2.) Egy 6 fős társaság kirándulni ment Erdélybe. Mivel az erdőben sok a medve, ezért úgy határoztak, hogy minden éjjel őrséget állítanak. Úgy határoztak, hogy egy őrségben részt vevő csapatnak legalább három főből kell állnia. Továbbá minden éjszaka más legyen az őrségben részt vevő csapat összetétele, mivel ellenkező esetben unalmas lenne. Hány különböző összetételű csapatot tudtak összeállítani?

Megoldás:

Kezdetben úgy döntöttek, hogy a csapatban részt vevők személyét sorshúzással döntik el. Mégpedig úgy, hogy egy érmével dobnak, és aki fejet dob az beáll az őrségbe, aki pedig írást az kimarad belőle. Így összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ különböző lehetőség adódott. Viszont olyan esetek is előfordultak, amikor a résztvevők száma háromnál kevesebb volt (ez pedig nem volt engedélyezve), ezek a következők voltak:

- mindenki írást dobott (így senki nem állt őrségbe), ez egyetlen esetben fordult elő;
- pontosan egy ember dobott fejet (így az őrség egytagú volt), ez 6 esetben fordult elő, mivel összesen hatan voltak;
- két ember dobott fejet (így az őrség két emberből állt), ez $6 \cdot 5 : 2 = 15$ esetben fordult elő.

Tehát összesen $\mathbf{64 - (1 + 6 + 15) = 42}$ különböző összetételű csapatot bírtak összeállítani.

3.) A Bivalyréti Nagyvásáron egy újságíró egyenként megkérdezte a jelenlévő 50 embert, hogy az illetőnek hány falubelije vett részt a vásárban. Az 50 válaszból a következőket ismerjük: 10-en mondtak 6-ot, 13-an mondtak 5-öt, 8-an mondtak 4-et, 7-en pedig 3-at. Mi lehet a hiányzó 12 válasz?

Megoldás:

Elsőként vizsgáljuk meg azt a 10 embert, aki 6-ot mondott. Ezek olyan falvakból jöttek, ahonnan településenként 7 ember érkezett a vásárba (mivel a megkérdezett egyénről és másik 6 falubelijéről van szó). Mivel 10 ember adta ezt a választ, ezért legalább két olyan település létezik, ahonnan 7-7 ember érkezett, ez összesen $2 \cdot 7 = 14$ embert jelent. Vagyis legalább még **4 olyan ember van, aki 6-ot mondott.**
A fenti gondolatmenetet követve, mivel 13-an mondtak 5-öt, ezért legalább három olyan település van, ahonnan 6-6 ember érkezett, ez $3 \cdot 6 = 18$ embert jelent. Tehát legalább még **5 olyan ember van, aki 5-öt mondott.** Mivel 8-an mondtak 4-et, ezért legalább két olyan település van, ahonnan 5-5 ember érkezett, ez $2 \cdot 5 = 10$ embert jelent. Így legalább még **2 olyan ember van, aki 4-et mondott.** 7 ember mondott 3-at, ebből következik, hogy legalább két olyan település van, ahonnan 4-4 ember érkezett, ez összesen $2 \cdot 4 = 8$ embert jelent. Tehát legalább még **1 olyan ember van, aki 3-at mondott.** Így megvan a hiányzó 12 válasz.

4.) Egy iskolában a biológia, földrajz, angol, francia, történelem és matematika órákat három tanár tanítja: Magyar, Lantos és Tatár. Ki milyen szakos tanár, ha tudjuk, hogy:

a) mindegyikük két-két tárgyat tanít;
b) a földrajz tanár és a franciatanár szomszédok;
c) Magyar a legfiatalabb közülük;
d) Tatár, a biológia tanár és a franciatanár (mindhárman) ugyanazon az úton járnak munkába;
e) a biológia tanár idősebb a matematika tanárnál;
f) szabad idejében az angol tanár, a matematika tanár és Magyar szívesen kártyáznak, ha találnak egy negyedik játékost.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Megoldás:

Mivel Magyar a legfiatalabb, ezért ő az e) állítás alapján nem lehet biológia tanár. Viszont a d) állítás alapján Tatár sem lehet biológia tanár, így a *biológia tanár csak Lantos lehet.* Mivel a biológia tanár Lantos, ezért a d) állításból következik, hogy *a franciatanár csak Magyar lehet.* Tudva azt, hogy Lantos a biológiatanár, ezért az e) állítás szerint Lantos nem lehet matematika tanár. Az f) állításból viszont következik, hogy Magyar sem lehet a matematika tanár, így *a matematika tanár csak Tatár lehet.* Mivel f) szerint az angol tanár, a matematika tanár (akiről tudjuk, hogy ő Tatár) és Magyar együtt kártyáznak, ezért *Lantos az angol tanár,* tehát **Lantos két szakja a biológia és az angol.** Mivel b) szerint a földrajz tanár és a franciatanár szomszédok, valamint Magyar a franciatanár, így *a földrajz tanár csak Tatár lehet*, tehát **Tatár két szakja a földrajz és a matematika.** Kizárásos alapon *Magyar másik szakja a történelem*, tehát **Magyar franciát és történelmet tanít.**

Gyakorló feladatok

1.) Egy 32 fős osztály vetélkedősorozatot szervez. Minden fordulóban tetszőleges létszámmal két csapat vetélkedik. Egy-egy csapat állhat akár egy főből is, és nem szükséges, hogy minden diák minden fordulóban részt vegyen. Szükséges viszont, hogy bármely két diák legalább egyszer egymás ellenfele legyen, azaz legyen olyan forduló, amikor különböző csapatokban szerepelnek. Legkevesebb hány fordulóban lehet a versenyt lebonyolítani?

2.) Négy tanyasi település vezetői elhatározták, hogy a települések között közlekedés céljából utat építenek. A kör alakú utat úgy kívánják a térképen kijelölni, hogy mind a négy településről egyenlő hosszúságú bekötőút vezessen hozzá. A négy település között nincs három olyan, amely egy egyenesen fekszik, és nincs olyan kör, amely áthalad mind a négy településen. Hogyan szerkesszék meg a térképen az építendő kör alakú út vonalát? Hány ilyen út szerkeszthető?

3.) Egy vendéglőben 6 ember egy kerek asztalhoz ül. Úgy szeretnének leülni az asztal köré, hogy senki se kerüljön olyan ember mellé, akivel nincsen jó viszonyban. Tudjuk, hogy a 6 résztvevő mindegyikének pontosan két haragosa van jelen (a harag kölcsönös). Hogyan tudnak az asztal köré leülni?

4.) Egy labdarúgó tornán öt csapat vett részt: a Fradi, a Kecskemét, a Honvéd, a Vasas és az Újpest. Az első napon lejátszott mérkőzésekről a következőket tudjuk:

a) egyik csapat sem játszott kétszer ugyanazzal az ellenféllel;
b) egyik csapat sem játszott kettőnél több mérkőzést;
c) a Vasas két meccset játszott és nem játszott az Újpesttel;
d) a Honvéd csak a Fradival játszott;
e) az Újpest csak egy mérkőzést játszott.

Melyik mérkőzésekre került sor az első napon?

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Kitűzött feladatok

1.) Egy légitársaság 6 európai és 5 afrikai város között tart fenn repülőjáratokat, minden egyes városból minden másik városba indul járat. A légitársaság térképén zölddel jelölték azokat a járatokat, amelyek két európai várost, kékkel pedig azokat, amelyek két afrikai várost kötnek össze. Továbbá pirossal jelölték azokat a járatokat, amelyek egy európai és egy afrikai várost kötnek össze. Hány zöld, kék, illetve piros vonal szerepel a légitársaság térképén?

2.) Agyonnerúgd településen labdarúgó bajnokságot szerveztek, ahol 40 tanya labdarúgócsapata vett részt. A csapatokat 8 csoportba osztották, minden csoportba 5 együttes került. A csoportmérkőzések során minden csapat mindegyikkel játszott és minden csoportból az első két helyezett jutott tovább. A későbbiekben a továbbjutó 16 csapat a hagyományos egyenes kieséses rendszerben játszott tovább. Az elődöntőket bronzmérkőzés (itt az elődöntők két vesztese a bronzéremért küzdött), valamint a döntő követte. Összesen hány mérkőzést bonyolítottak le? A labdarúgó tornán hány mérkőzést játszott Kecskemekeg csapata, ha tudjuk, hogy 4. helyezést ért el?

3.) Egy farsangi bálon 142-en vettek részt. Az első lány 27 fiúval táncolt, a második 28-cal, a harmadik 29-cel és így tovább. Végül az utolsó lány minden fiúval táncolt. Hány fiú volt a bálon?

4.) Az asztalon egy fehér, egy fekete, egy piros, egy kék és egy zöld doboz van. Minden dobozban két golyó található. A golyók színe is fehér, fekete, piros, kék, illetve zöld, minden színből két-két golyó van. Melyik dobozban milyen színű golyók vannak, ha tudjuk, hogy:
   a) egyik golyó sincs a vele azonos színű dobozban;
   b) a piros dobozban nincs kék golyó;
   c) a fehér vagy a fekete dobozban egy piros és egy zöld golyó található;
   d) a fekete dobozban egy kék és egy zöld golyó van;
   e) az egyik dobozban egy fehér és egy kék golyó van;
   f) a kék dobozban van egy fekete golyó.

Beküldési határidő: **2023.03.10.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2022/2023.4. feladatsor**
7.-8. évfolyam

SZÖGSZÁMÍTÁSI FELADATOK

A szögszámítási feladatoknál általános iskolában a háromszög és néhány speciális négyszög szögeire vonatkozó fontos tétel van segítségünkre. Ezek közül említünk néhányat:

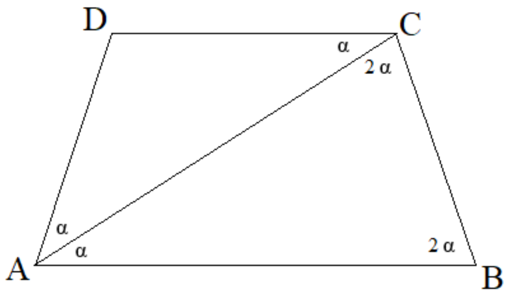
1) **A háromszög belső szögeinek összege 180°.**
2) **A háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb, kisebb oldallal szemben kisebb szög van.**
3) **A háromszög bármely külső szöge egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével.**
4) **A trapéz ugyanazon szárán fekvő két szögének összege 180°. (társszögek)**
5) **A paralelogramma szemközti szögei egyenlők. (váltószögek)**
6) **A paralelogramma bármely két szomszédos szögének összege 180°.**
7) **A szimmetrikus trapéz ugyanazon az alapon fekvő szögei egyenlőek.**
8) **Szimmetrikus háromszög alapon fekvő szögei egyenlők.**
9) **Ha egy szabályos háromszöget kettévágunk a szimmetriatengelye mentén, akkor két félszabályos háromszöget kapunk. Az ilyen derékszögű háromszögekre igaz, hogy szögeik 30°, 60°, 90°, a leghosszabb oldaluk pedig kétszerese a legrövidebb oldalnak.**

Mintapéldák

1.) Egy húrtrapézt (szimmetrikus trapézt) az egyik átlója két egyenlő szárú háromszögre bont. Mekkorák a trapéz szögei?

Megoldás:

$CAB\measuredangle = ACD\measuredangle = \alpha$
(váltószögek)
$ACD\measuredangle = CAD\measuredangle = \alpha$
(egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei)
$DAB\measuredangle = 2\alpha = CBA\measuredangle$
(trapéz ugyanazon alapján fekvő szögek)
$CBA\measuredangle = BCA\measuredangle = 2\alpha$
(egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei)

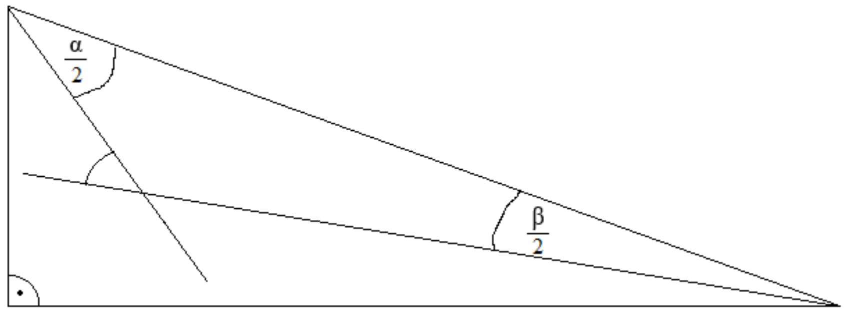


Az ABC háromszögben: $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$, ahonnan $\alpha = 36°$.
A trapéz szögei: 72°, 72°, 108°, 108°.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

2.) Egy derékszögű háromszögben megrajzoltuk a hegyesszögek szögfelezőit. Mekkora szöget zárnak be ezek a szögfelezők?

Megoldás:

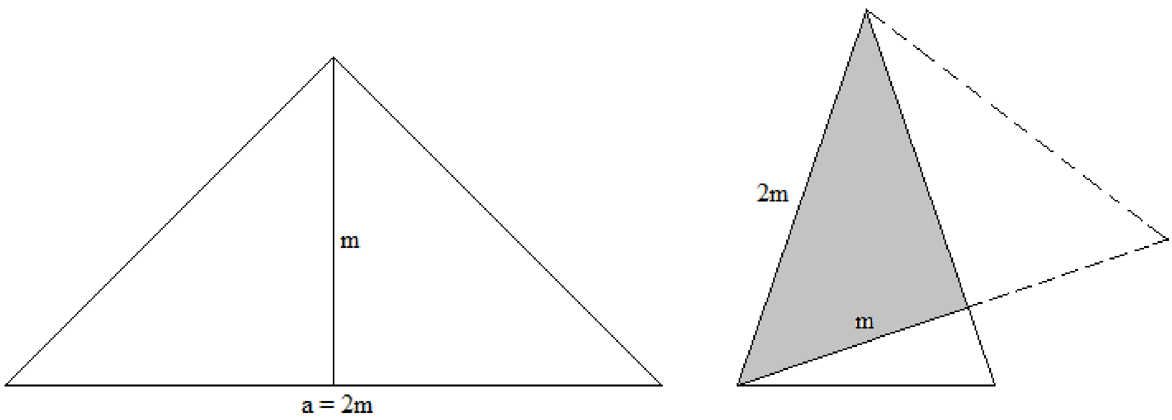


A szögfelezők és az átfogó által meghatározott háromszög egy külső szöge a kérdezett szög:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{90^\circ}{2}=45^0$$

3.) Mekkorák lehetnek annak a tükrös háromszögnek a szögei, amelynek egyik oldala kétszerese a hozzátartozó magasságnak?

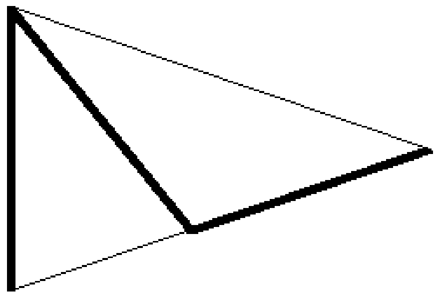
Megoldás:



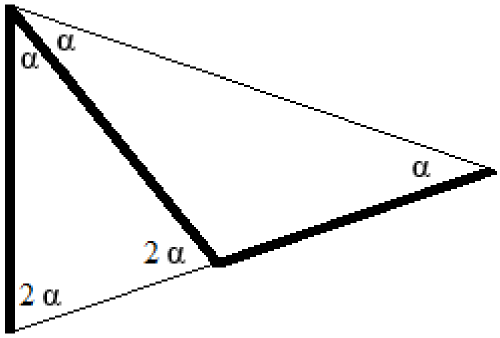
Ha az alap kétszerese a hozzátartozó magasságnak, akkor az a magasság a háromszöget két egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja, így a háromszög szögei: **45°, 45°, 90°.**
Ha a szár kétszerese a hozzátartozó magasságnak, akkor a szárszög 30°. (Tükrözzük a satírozott háromszöget a szárra, így egy szabályos háromszöghöz jutunk. A satírozott háromszöget félszabályos háromszögnek hívjuk.)
A háromszög szögei: 75°, 75°, 30°.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

4.) Ebben az egyenlő szárú háromszögben a vastagon rajzolt szakaszok egyenlőek. Mekkorák a háromszög szögei?



Megoldás:



Az ábrán három egyenlőszárú háromszög látható.
Az egyenlő nagyságú szakaszok miatt a két α-val jelölt szög egyenlő.
A külső szög $\alpha + \alpha = 2\alpha$,
Így a bal alsó sarokban lévő szög is 2α.
Ebben a háromszögben a szögek összege 180°,
$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$, ahonnan $\alpha = 36°$.
A háromszög szögei: 72°, 72°, 36°.

Gyakorló feladatok

1.) Egy háromszög legnagyobb oldalának hossza kétszerese a legkisebb oldal hosszának, és a legnagyobb szöge pedig háromszor akkora, mint a legkisebb szög. Hány fokos a háromszög legkisebb szöge?

2.) Mekkorák az ABC háromszög szögei, ha két magassága legalább akkora, mint a hozzá tartozó alap?

3.) Az ABC szabályos háromszög C csúcson átmenő magasságát meghosszabbítjuk C-n túl úgy, hogy a CF szakasz hossza annyi, mint az AB szakaszé. Mutasd meg, hogy az AFB és az ACB szögek összege 90°!

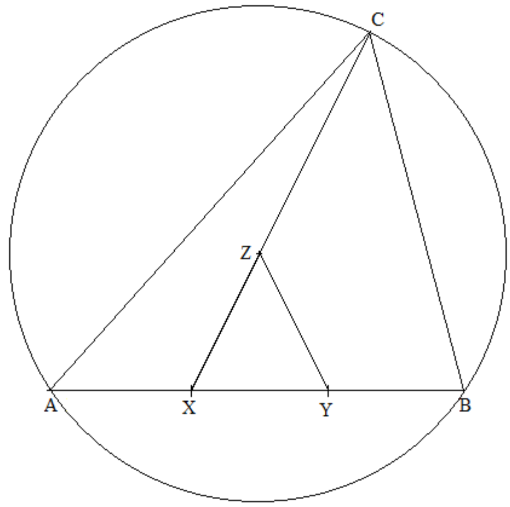
4.) Bizonyítsd be, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 15°, akkor az átfogó négyszerese az átfogóhoz tartozó magasságának!

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

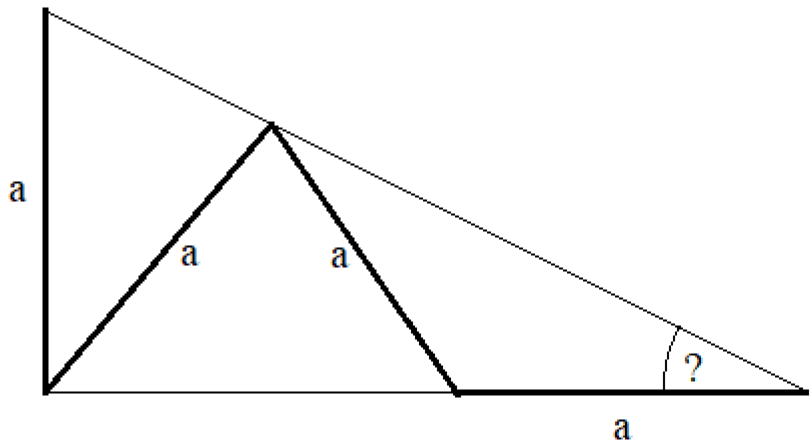
Kitűzött feladatok

1.) Az ABC hegyesszögű háromszögben AB = BC, és a háromszög magasságpontja M. Mekkorák a háromszög szögei, ha MB = AC?

2.) Az AB szakaszt az X és Y pontokkal három egyenlő részre osztottuk és az XY fölé egyenlő oldalú háromszöget szerkesztettünk, melynek harmadik csúcsa Z. A Z pont körül AZ = BZ sugárral kört rajzoltunk, amelyet az ábrán látható módon XZ meghosszabbítása a C pontban metsz. Mekkorák az ABC háromszög szögei?



3.) Az ábrán látható derékszögű háromszögben a vastagított vonallal jelölt szakaszok egyenlőek. Mekkora a kérdőjellel megjelölt szög?



4.) Egy szimmetrikus (egyenlő szárú) trapéz hosszabbik alapja kétszerese a rövidebb alapnak. Tudjuk még, hogy a trapéz átlója felezi a trapéz hegyesszögét. Mekkorák a trapéz szögei?

Beküldési határidő: **2023.03.10.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre