Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör ***2021/2022. 3. feladatsor***
5.-6. évfolyam

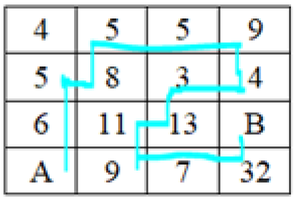
MEGOLDÁSOK

1.) Az A-val jelölt négyzetből indulunk és a B-vel jelölt négyzetbe érkezünk, úgy, hogy minden négyzetre csak egyszer léphetünk. Minden négyzetre lépve az ott található pontszámot gyűjthetjük be. Mennyi a legtöbb összegyűjthető pont?

4	5	5	9
5	8	3	4
6	11	13	B
A	9	7	32

Megoldás:

Mivel minden négyzetre csak egyszer léphetünk, ezért arra kell törekedni, hogy lehetőleg csak egy négyzetet hagyjunk ki és az a lehető legkisebb legyen. (A 3-ason mindenképpen át kell haladnunk, így a 4-est tudjuk kihagyni.) Ezeket figyelembe véve a következő útvonalat kapjuk.



4	5	5	9
5	8	3	4
6	11	13	B
A	9	7	32

A fenti útvonalon haladva, a maximálisan összegyűjthető pontszám 117.

2.) A Kilencesfalván található fogadóban hány fős osztályokat lehet elszállásolni a helyi szabályokat tiszteletben tartva? Minden lehetséges osztálylétszám esetében adjunk egy konkrét példát a tanulók elhelyezésére!

Megoldás:

Jelölje rendre *a, b, c, d ,e, f, g* és *h* az egyes szobákban tartózkodó személyek számát, ezek elrendezése az alábbi ábrán látható:

g	f	e
h	T	d
a	b	c

Készítette:
Dr. Fülöp Zsolt

A feltételek alapján:

$$a + b + c = 9$$
$$c + d + e = 9$$
$$e + f + g = 9$$
$$g + h + a = 9$$

A fenti egyenlőségek megfelelő oldalait összegezve kapjuk, hogy:

$$2 \cdot (a + c + e + g) + (b + d + f + h) = 36 \qquad (1)$$

Keressük meg az $S = a + b + c + d + e + f + g + h$ összeg lehető legnagyobb, illetve lehető legkisebb értékét. Az (1) egyenlőség az alábbi alakban is írható:

$$2 \cdot (a + b + c + d + e + f + g + h) - (b + d + f + h) = 36 \qquad (2)$$

Ha feltételezzük, hogy $S < 18$ is lehetséges, akkor $2S < 36$, tehát

$$2 \cdot S - (b + d + f + h) < 36$$

ami ellentmond a (2) egyenlőségnek. Ugyanakkor az (1) egyenlőség a következő alakban is írható:

$$a + b + c + d + e + f + g + h + (a + c + e + g) = 36$$

vagyis

$$S + (a + c + e + g) = 36$$

Ezért, ha feltételezzük, hogy $S > 36$ is lehetséges, akkor $a + c + e + g < 0$ kellene, hogy legyen, ami szintén lehetetlen.

Tehát legkevesebb 18 és legfeljebb 36 tanuló szállásolható el a fogadóban. A következőkben mindegyikre adunk egy példát:

18 fő

2		7
	T	
7		2

19 fő

1		8
	T	1
8	1	

20 fő

2	1	6
1	T	1
6	1	2

21 fő

1	2	6
2	T	1
6	1	2

22 fő

3	2	4
2	T	2
4	2	3

23 fő

2	3	4
3	T	2
4	2	3

24 fő

4	3	2
3	T	3
2	3	4

25 fő

2	4	3
3	T	4
4	3	2

26 fő

2	4	3
4	T	4
3	4	2

27 fő

	9	
1	T	8
8		1

28 fő

2	5	2
5	T	5
2	5	2

29 fő

4	4	1
4	T	7
1	7	1

30 fő

3	6	0
6	T	6
0	6	3

31 fő

0	7	2
7	T	6
2	6	1

32 fő

2	7	0
7	T	7
0	7	2

33 fő

0	8	1
8	T	7
1	7	1

34 fő

1	8	0
8	T	8
0	8	1

35 fő

1	8	0
8	T	9
0	9	0

36 fő

0	9	0
9	T	9
0	9	0

Készítette:
Dr. Fülöp Zsolt

3.) Adél, Bori, Csilla és Dóri egy sötét, szűk alagúton szeretne átjutni. Van egy 12 percig égő lámpásuk. Adél 1, Bori 2, Csilla 3 és Dóri 5 perc alatt képes megtenni a távot. A sötétben félnek, ezért az alagútban lámpás nélkül nem mehetnek, és a szűk alagútban egyszerre legfeljebb ketten férnek el. Átjuthatnak-e mindannyian a szűk alagúton 12 perc alatt? Ha igen, akkor hogyan?

Megoldás:

Adél és Bori átmegy az alagúton, ez 2 percet vesz igénybe. Adél 1 perc alatt visszajön és átviszi Csillát 3 perc alatt. Ezután megint visszajön 1 perc alatt és Dórit is átviszi 5 perc alatt. **Tehát mindannyian átmehetnek az alagúton, és ez 12 percet vesz igénybe.**

4.) Az alábbi táblázatban az azonos betűk azonos értékűek, a különböző betűk különböző értékűek. Az utolsó sorban, illetve oszlopban az illető sor, illetve oszlop elemeinek az összege van feltüntetve. Milyen számot írjunk a kérdőjel helyére?

A	B	C	C	48
C	A	A	A	46
B	B	B	C	70
A	C	A	B	54
54	?	54	48	

Megoldás:

A feladat megoldható anélkül, hogy a betűk konkrét értékét meghatároznánk. A 3. oszlop és a 2. sor csak abban különbözik, hogy a 2. sorban a B helyett A van. Ezért $B - A = 54 - 46 = 8$. Viszont, ha összehasonlítjuk a 2. és 3. oszlopokat, akkor beláthatjuk, hogy a 2. oszlopban a tagok összege $B - A = 8$ - cal több, mint a 3. oszlopban szereplő tagok összege. **Tehát a kérdőjel helyére az $\mathbf{54 + 8 = 62}$ szám kerül.**

Készítette:
Dr. Fülöp Zsolt

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu e-mail: boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör ***2021/2022. . feladatsor***
7.-8. évfolyam

MEGOLDÁSOK

1.) Egy kollégium négy épületében összesen 436 diákot helyeztek el. Az első épületben 10 diákkal több van, mint a negyedikben, a negyedikben pedig 88 diákkal több van, mint a harmadikban. A második épületben viszont 10 diákkal több van, mint a harmadikban. Hány diák lakik az egyes épületekben?

Megoldás:

A harmadik épületben lévő diákok száma legyen *x*. Ekkor a második épületben $x + 10$, a negyedikben $x + 88$, az elsőben pedig $x + 98$ diák van.

$$x + (x + 10) + (x + 88) + (x + 98) = 436$$
$$4x + 196 = 436$$
$$4x = 240$$
$$x = 60$$

Az első épületben 158, a másodikban 70, a harmadikban 60, a negyedikben pedig148 diák van.

2.) Alakítsd a kifejezést két egész együtthatós polinom szorzatává!

a) $x^4 + 4$
b) $x^4 - 7x^2 + 1$

Megoldás:

Két olyan másodfokú kifejezést kell találnunk, ahol a konstansok szorzata 4, ill. 1. Mivel a harmadfokú kifejezések hiányoznak az eredeti kifejezésekben, ezért a 2-2 szorzótényezőben az elsőfokú együtthatóknak egymás ellentettjeinek kell lenniük. Próbálkozások után adódik:

a) $x^4 + 4 = \boldsymbol{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}$

b) $x^4 - 7x^2 + 1 = \boldsymbol{(x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 1)}$

Készítette:
Merényi Imre

4.) Számítsd ki a következő szorzatot!

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)$$

Megoldás:

A zárójelekben kialakuló törtek számlálói, ill. nevezői egyszerűsíthetők az első nevező, ill az utolsó számláló kivételével, így:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{99}\cdot\frac{101}{100}=\frac{101}{2}=\mathbf{50,5}$$

5.) Legyen *x* olyan valós szám, melyre $x^3=x+1$. Mutasd meg, hogy ekkor $x^5=x^4+1$!

Megoldás:

Szorozzuk be az első egyenletet *x*-szel, ekkor a következő összefüggést kapjuk:

$$x^4=x^2+x$$

Szorozzuk be az első egyenletet x^2-tel, ekkor a következő összefüggést kapjuk:

$$x^5=x^3+x^2$$

Itt x^3 helyére írjunk $x+1$-et a feltételnek megfelelően:

$$x^5=x^3+x^2=(x+1)+x^2=(x^2+x)+1=x^4+1$$

És ezt az állítást szerettük volna bizonyítani!

Készítette:
Merényi Imre