Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör ***2021/2022. 3. feladatsor***
5.-6. évfolyam

GONDOLKODJUNK, RENDSZEREZZÜNK TERVEZZÜNK

Sokan a matematikára úgy tekintenek, hogy ez inkább a gondolkodás, mint a számok tudománya. Ez elsősorban annak tulajdonítható, hogy a matematikai problémák megoldása során bonyolult műveletek elvégzésével mozgósítjuk és fejlesztjük a gondolkodásunkat. Ennek eredményeképpen vagyunk képesek egy matematikai feladatra minél elegánsabb, ügyesebb és ötletesebb megoldást találni. Ilyenkor rövid időn belül előhívjuk és alkalmazzuk a rendelkezésünkre álló tudástárt, a múltbeli tapasztalatokat vagy az aktuális feladathoz kapcsolódó problémák megoldási módszereit. Bizonyos esetekben szükséges, hogy átváltsunk egyik megközelítési módról a másikra, vagy egy módszert rendezünk át az új feladat követelményeinek megfelelően. Előállhatnak olyan helyzetek is, amikor nem a már meglévő ismeretekre, megoldási stratégiákra támaszkodunk, hanem új, szokatlan ötletekkel állunk elő, amelyek nem egyeznek a hagyományos vagy átlagos megoldási módszerekkel.

Mintapéldák

1.) Hányféleképpen olvasható ki az ELEMÉR szó a mellékelt ábrán, ha bármelyik E betűből kiindulhatunk, és csak közvetlen szomszédos mezőre jobbra, balra vagy lefelé lehet lépni?

					E					
				E	L	E				
			E	L	E	L	E			
		E	L	E	M	E	L	E		
	E	L	E	M	É	M	E	L	E	
E	L	E	M	É	R	É	M	E	L	E

Megoldás:

Ha a „szélső” 11 darab E betű valamelyikéből indulunk, az alábbi ábrán látható módon, fentről lefele, illetve jobbra és balra haladva írjuk a mezőkbe, hogy összesen hány szomszédos mezőből vezet „út” fentről, jobbról vagy balról az illető mezőbe. Így az R betű helyére 63 módon érkezhetünk.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

					E					
				E	3	E				
			E	2	7	2	E			
		E	2	4	15	4	2	E		
	E	2	4	8	31	8	4	2	E	
E	2	4	8	16	63	16	8	4	2	E

Ha a „belső" 7 darab E betű valamelyikéből indulunk, akkor hasonlóan járunk el, és figyelmesen követjük, hogy összeálljon az ELEMÉR szó. Az alábbi ábrát követve 14 megoldás adódik.

					L					
				L	E	L				
			L	E	2	E	L			
		L	E	2	6	2	E	L		
	L	E	2	4	14	4	2	E	L	

Tehát a két esetet figyelembe véve összesen $63 + 14 = 77$ – féleképpen olvasható ki az ELEMÉR szó.

2.) A Nemsokattanulunk Általános Iskola 24 tanulója osztálykirándulásra ment Kilencesfalvára. A helyi kilenc szobás fogadóban szálltak meg, amelynek alaprajza az ábrán látható.

	T	

A tanár a T betűvel jelölt szobában szállt meg, viszont a tanulókat úgy kellett elhelyeznie, hogy minden oldalon 9-9 tanuló legyen, ugyanis Kilencesfalván ezt egy helyi rendelet így szabályozza. Mivel az osztály összes tanulója fiú volt, a kísérő tanár ezt könnyen megoldotta a következő módon.

3	3	3
3	T	3
3	3	3

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

A sikeres kirándulás után az iskola egy másik osztálya szintén Kilencesfalvára ment kirándulni. Ebben az esetben viszont az osztálylétszám 28 fő volt, amelyből 17 lány és 11 fiú. Elhelyezhette a tanár a tanulókat a fogadóban?

Megoldás:

A Kilencesfalván érvényben levő szabályok szerint néhány megoldás a következő lehet:

2	5	2
5	T	5
2	5	2

3	5	1
5	T	5
1	5	3

	5	4
5	T	5
4	5	

Ugyanakkor beláthatjuk, hogy az alsó sorban lévő elrendezés esetében nem lehetséges a 17 lányt és 11 fiút úgy elhelyezni, hogy minden szobában csak azonos nemű tanulók legyenek. Viszont a felső sorban található mindkét elhelyezés megfelel a feltételeknek.

3.) Egy lóversenyen az A, B, C, D és E versenylovakra lehet fogadni. András és Balázs fogadást kötöttek az érkezési sorrendet illetően.
András tippje: A, B, C, D, E
Balázs tippje: B, D, E, A, C
Tudva azt, hogy Andrásnak három, Balázsnak pedig két találata van, állapítsuk meg a valódi érkezési sorrendet!

Megoldás:

Először felírjuk a két fiú 3-as, illetve 2-es lehetőségeinek táblázatát, figyelembe véve a tippek sorrendjét.

András tippje					Balázs tippje				
A	B	C	D	E	B	D	E	A	C
A	B	C	-	-	B	D	-	-	-
A	B	-	D	-	B	-	E	-	-
A	-	-	B	E	B	-	-	A	-
A	-	C	D	-	B	-	-	-	C
A	-	C	-	E	-	D	E	-	-
A	-	-	D	E	-	D	-	A	-
-	B	C	D	-	-	D	-	-	C
-	B	C	-	E	-	-	E	A	-
-	B	-	D	E	-	-	E	-	C
-	-	C	D	E	-	-	-	A	C

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Az András, illetve Balázs nyertes tippjeinek táblázatából olyan sorokat kell összeillesztenünk, amelyek esetében a kapott öt betűből álló betűsor elemei különbözőek és két betű nem fedi egymást. Ezeknek a feltételeknek a teljesülését az András táblázatának 2. sora (AB-D-) és a Balázs táblázatának 9. sora (--E-C) „összeillesztésével" kapjuk. Tehát az öt versenyző beérkezési sorrendje A, B, E, D, C.

4.) Három testvér kecskéken és kecskegidákon osztozik. Tíz kecskének egy-egy gidája, tíznek két-két gidája, és tíznek három-három gidája van. Hogyan oszthatják el ezeket úgy, hogy mindegyik testvérnek ugyanannyi kecske és ugyanannyi gida jusson, de egyetlen gidát sem választhatnak el az anyjától?

Megoldás:

Mivel összesen 30 kecske és 60 gida van, könnyen belátható, hogy minden testvér 10-10 kecskét és 20-20 gidát kap. Az osztozkodásnál több tervszerű próbálgatással is célt érünk.

Első eset:

Elsőként szétosztjuk azokat a kecskéket, amelyeknek 3-3 gidájuk van, ezekből az első testvér 4 kecskét, a másik kettő pedig 3-3 kecskét kap. Utána a másodiknak és a harmadiknak adunk 4-4 kétgidás és 3-3 egygidás kecskét. Ezeket összeszámlálva adódik, hogy a második és a harmadik megkapta a 10-10 kecskét és 20-20 gidát. A maradék kecskéket (négy egygidás és kettő kétgidás) az első testvérnek adjuk, így neki is 10 kecskéje és 20 gidája lesz. A végeredményt, a kecskék számával, az alábbi táblázatba foglaljuk.

	egygidás	kétgidás	háromgidás
első testvér	4	2	4
második testvér	3	4	3
harmadik tesvér	3	4	3

Második eset:

Elsőként az első testvérnek adjuk az összes kétgidás kecskét. Így könnyen belátható, hogy a maradék kecskéket (mivel páros számúak) egyenlően szétoszthatjuk a másik két testvér között, ezek fejenként 5 egygidás és 5 háromgidás kecskét kapnak. A végeredményt itt is táblázatba foglaljuk.

	egygidás	kétgidás	háromgidás
első testvér	0	10	0
második testvér	5	0	5
harmadik tesvér	5	0	5

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Gyakorló feladatok

1.) A mellékelt ábrán egy térkép részlete látható. János bácsi az A helységből a B helységbe kell, hogy tereljen egy juhnyájat. Mivel a legrövidebb úton akar eljutni, ezért az ábrán csak jobbra vagy lefelé mehet. Viszont az F-fel jelölt négyzeteken farkasok tartózkodnak, így ezeket ki kell kerülnie. Hányféleképpen juthat el János bácsi a legrövidebb úton az A helységből a B helységbe?

A					
		F			
F				F	
		F			
					B

2.) Beírhatók-e egy 5×6 –os táblázatba 1-től 30-ig a természetes számok úgy, hogy minden sorban azonos legyen a számok összege? Megoldható ugyanez a feladat úgy, hogy minden oszlopban legyen azonos a számok összege?

3.) János bácsi egy 24 literes korsóból bort árul. Van még egy 13, egy 11 és egy 5 literes üres korsója. Igaz-e, hogy a négy korsó segítségével minden vevőt ki tud szolgálni, aki 1 és 24 liter közötti, egész liter bormennyiséget kér? (Az 1 liter és 24 liter mennyiséget is beleértjük!)

4.) Egy raktárból 21 egyforma olajtartályt kell elszállítani három kocsival. A tartályok közül 7 telt, 7 félig töltött, 7 pedig üres. Hogyan rakhatók fel a tartályok a három kocsira úgy, hogy mindegyik terhelése ugyanakkora legyen, ha az olajat nem lehet az egyik tartályból a másikba átönteni?

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Kitűzött feladatok

1.) Az A-val jelölt négyzetből indulunk és a B-vel jelölt négyzetbe érkezünk, úgy, hogy minden négyzetre csak egyszer léphetünk. Minden négyzetre lépve az ott található pontszámot gyűjthetjük be. Mennyi a legtöbb összegyűjthető pont?

4	5	5	9
5	8	3	4
6	11	13	B
A	9	7	32

2.) A Kilencesfalván található fogadóban hány fős osztályokat lehet elszállásolni a helyi szabályokat tiszteletben tartva? Minden lehetséges osztálylétszám esetében adjunk egy konkrét példát a tanulók elhelyezésére!

3.) Adél, Bori, Csilla és Dóri egy sötét, szűk alagúton szeretne átjutni. Van egy 12 percig égő lámpásuk. Adél 1, Bori 2, Csilla 3 és Dóri 5 perc alatt képes megtenni a távot. A sötétben félnek, ezért az alagútban lámpás nélkül nem mehetnek, és a szűk alagútban egyszerre legfeljebb ketten férnek el. Átjuthatnak-e mindannyian a szűk alagúton 12 perc alatt? Ha igen, akkor hogyan?

4.) Az alábbi táblázatban az azonos betűk azonos értékűek, a különböző betűk különböző értékűek. Az utolsó sorban, illetve oszlopban az illető sor, illetve oszlop elemeinek az összege van feltüntetve. Milyen számot írjunk a kérdőjel helyére?

A	B	C	C	48
C	A	A	A	46
B	B	B	C	70
A	C	A	B	54
54	?	54	48	

Beküldési határidő: **2022.02.04.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2021/2022. 3. feladatsor**
7.-8. évfolyam

ALGEBRAI FELADATOK

Az algebra a matematika egyik ága, melyet a matematikai műveletek általános tudományaként határozhatunk meg. A „művelet” fogalma a matematika minden ágában alapvető szerepet játszik, de magát a művelet általános fogalmát, és ezek fajtáit (tekintet nélkül konkrét alkalmazásukra) az algebra vizsgálja.

A tudományterület neve Muhammad ibn Músza l-Hvárizmi perzsa matematikus, asztronómus, asztrológus és geográfus Kitáb al-Dzsabr va l-Mukábala (dzsabr: összeilleszkedés, újraegyesítés) című értekezésének címéből származik, amely lineáris és kvadratikus egyenletek matematikai megoldását is leírta szimbolikus műveletek segítségével.

Az alábbi azonosságokat ismerjük most meg:

1. Kéttagú összeg illetve különbség négyzete.

Szavakkal: *Egy kéttagú kifejezés négyzete egyenlő az első tag négyzetének, az első és második tag előjeles szorzatának kétszeresének és a második tag négyzetének összegével.*

Formulával: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Szorzat alak, összeg alak.)

Példa: $(3x \pm 25y)^2 = 9x^2 + 150xy + 625y^2$

2. Két tag különbségének és összegének a szorzata.

Szavakkal: *Két tag összegének és különbségének szorzata egyenlő a két tag négyzetének különbségével.*

Formulával: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (Szorzat alak, összeg alak.)

Példa: $(23x + 7y)(23x - 7y) = 529x^2 - 49y^2$

3. Háromtagú összeg négyzete.

Szavakkal: *Egy háromtagú összeg négyzete egyenlő a tagok négyzeteinek és a lehetséges kétszeres szorzataiknak összegével.*

Formulával: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ (Szorzat alak, összeg alak.)

4. Kéttagú összeg illetve különbség harmadik hatványa.

Formulával: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (Szorzat alak, összeg alak.)

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

Mintapéldák

1.) Decemberig az egyik tankönyvnek $\frac{1}{3}$ részét dolgozták fel a gyerekek. Ha még 40 oldalt megtanulnak, már csak 10 oldallal van több hátra, mint amennyit már elvégeztek. Hány lapot foglal el a tananyag a könyvben?

Megoldás:

Jelölje *x* az oldalak számát. Ekkor:

$$\left(\frac{1}{3}x + 40\right) + \left(\frac{1}{3}x + 40 + 10\right) = x$$
$$\frac{2}{3}x + 90 = x$$
$$90 = \frac{1}{3}x$$
$$x = 270$$

A könyv 270 oldalas, s így **135 lapos**.

2.) Adottak az 1 – x, 2 – x, 3 – x, … , 100 – x számok.

a) Számoljuk ki a szorzatukat, ha x = 77
b) Számoljuk ki az összegüket, ha x = 50,5

Megoldás:

a) Mivel a tényezők közt szerepel 77 – x, ami x = 77-re 0, **ezért a szorzat 0-val egyenlő**.
b) x = 50,5 esetén az adott számok -49,5; -48,5; -47,5; …; 49,5 és **ezek összege 0**, mert a tagok páronként egymás ellentettjei.

3.) Alakítsd a kifejezést két, egész együtthatós polinom szorzatává!

a) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$
b) $x^4 + x^2 + 1$

Megoldás:

a) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) =$
$= \mathbf{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)}$
b) $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = \mathbf{(x^2 + x + 1)\cdot(x^2 - x + 1)}$ (2. azonosság)

4.) Számítsd ki a következő összeget!

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100}$$

Megoldás:

Az $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ azonosság alapján az összeg:

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} = \mathbf{\frac{99}{100}}$$

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

Gyakorló feladatok

1.) Számítsd ki a következő összeget!

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots 2^2 - 1^2$$

2.) Igazold a következő azonosságot!

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = (a+b)(b+c)(c+a)$$

3.) Igazold, hogy ha $(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$, akkor $a = b = c$!

4.) Fél öt és öt óra között Jancsi megnézi a karóráját akkor, amikor a mutatók éppen egy egyenesbe esnek. Hány perc múlva lesznek legközelebb merőlegesek egymásra a mutatók?

Kitűzött feladatok

1.) Egy kollégium négy épületében összesen 436 diákot helyeztek el. Az első épületben 10 diákkal több van, mint a negyedikben, a negyedikben pedig 88 diákkal több van, mint a harmadikban. A második épületben viszont 10 diákkal több van, mint a harmadikban. Hány diák lakik az egyes épületekben?

2.) Alakítsd a kifejezést két egész együtthatós polinom szorzatává!

a) $x^4 + 4$

b) $x^4 - 7x^2 + 1$

3.) Számítsd ki a következő szorzatot!

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)$$

4.) Legyen x olyan valós szám, melyre $x^3 = x + 1$. Mutasd meg, hogy ekkor $x^5 = x^4 + 1$!

Beküldési határidő: **2022.02.04.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre