Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001: 2000

Levelező Matematika Szakkör ***2021/2022. 2. feladatsor***
5.-6. évfolyam

OSZTÓK ÉS TÖBBSZÖRÖSÖK

A számok osztóinak és többszöröseinek vizsgálatával a matematikának egyik ága, a számelmélet foglalkozik, amelyet az egész számok tudományának is tekintenek. Az oszthatóság tulajdonságainak tudományos vizsgálata már az ókori görögök matematikájában is megtalálható.
Minden számról el tudjuk dönteni, hogy osztója egy másik számnak a következőképpen: például 3 osztója a 21-nek, mivel találok egy olyan számot (a 7-est), amellyel a 3-at megszorozva 21-et kapok. Ekkor mondjuk, hogy a 3 osztója a 21-nek, illetve a 21 többszöröse a 3-nak. Egy szám osztóit könnyen felsorolhatjuk osztópárjai segítségével. Tekintsük például a 48-nak osztópárok szerinti felbontását:

$$48 = 1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$$

Tehát a 48 osztói 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 és 48.
Az oszthatóság tanulmányozása olyan érdekes problémákat vetett fel, mint például a prímszámok, tökéletes számok, barátságos számok, stb. vizsgálata.

Mintapéldák

1.) Tekintsük azokat a 4000-nél kisebb pozitív egész számokat, amelyekről a következőket tudjuk:
- osztható 9-cel;
- ha az utolsó számjegyét elhagyjuk, akkor a kapott háromjegyű szám osztható 4-gyel;
- ha az utolsó két számjegyét hagyjuk el, akkor a megmaradt szám osztható 7-tel.

Hány ilyen négyjegyű szám van?

Megoldás:

A harmadik feltételből indulunk ki. Megvizsgáljuk, hogy mi lehet az első két számjegy, ahhoz, hogy a kapott kétjegyű szám osztható legyen 7-tel. Így a 14, 21, 28 és 35 számokat kapjuk. A következőkben a harmadik számjegyet állapítjuk meg olyan módon, hogy teljesüljön a 4-gyel való oszthatóság. A következő háromjegyű számokat kapjuk: 140; 144; 148; 212; 216; 280; 284; 288; 352; 356. Az utolsó számjegyet a 9-cel való oszthatóságból állapítjuk meg, így a keresett négyjegyű számok a következők: 1404; 1440; 1449; 1485; 2124; 2160; 2169; 2808; 2844; 2880; 2889; 3528; 3564. ***Tehát 13 ilyen négyjegyű szám létezik.***

2.) Tekintsük 15-nek azokat a többszöröseit, amelyekben a számjegyek összege 15. Hány ilyen kétjegyű, háromjegyű illetve négyjegyű természetes szám van?

Megoldás:

A 15 többszörösei 5-re vagy 0-ra végződnek. A 0-ra végződők többi számjegyének összege 15, míg az 5-re végződőké 10. Tehát ***nincs ilyen kétjegyű szám.***

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

A háromjegyű számok esetében is ugyanebből az alapötletből indulunk ki. Először vesszük azokat a kétjegyű számokat, amelyekben a számjegyek összege 15 (ezek a 69, 78, 87, 96), majd ezek végére 0-t írunk. Utána tekintsük azokat a kétjegyű számokat, amelyekben a számjegyek összege 10 (ezek a 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91), majd ezek végére 5-t írunk. Tehát ***13 ilyen tulajdonságú háromjegyű szám van.***

A 0-ra végződő, a feltételnek eleget tevő, négyjegyű számok esetében a következőképpen járunk el. Ha a szám eggyel kezdődik, akkor a következő két számjegy összege 14, ha 2-vel kezdődik, akkor 13, és így tovább, ha 9-cel, akkor 6. Ezeket összeszámlálva adódik, hogy $5+6+7+8+9+10+9+8+7=69$ ilyen szám van.

A feltételnek megfelelő 5-re végződő négyjegyű számok esetében a következőképpen járunk el. Ha a szám 1-gyel kezdődik, akkor a következő két számjegy összege 9, ha 2-vel, akkor 8, és így tovább, ha 9-cel, akkor 1. Ezeket összeszámlálva adódik, hogy $10+9+8+7+6+5+4+3+2=54$ ilyen tulajdonságú szám van.

A fentiekből adódik, hogy 69 + 54 = ***123 négyjegyű szám van, amely a feltételeknek eleget tesz.***

3.) Mari néni a piacon tojásokat árul, néhány kosarában tyúktojás van, a többiben kacsatojás. Az egyes kosarakban a tojások száma 4, 6, 12, 13, 22 és 29. Mari néni így morfondírozik: „Ha ezt a kosarat eladom, akkor pontosan kétszer annyi tyúktojásom lesz, mint kacsatojásom”. Melyik kosárra gondolt Mari néni?

Megoldás:

Mivel egy kosár tartalmának eladása után a maradék kosarakban kétszer annyi tyúktojás lesz, mint kacsatojás, ezért a maradék tojások számának 3-mal oszthatónak kell lenni, mivel az egyharmaduk kacsatojás és kétharmaduk pedig tyúktojás. Kezdetben összesen 86 tojás van, ezt 3-mal osztva a maradék 2. Tehát egy olyan kosarat kell elhagynunk, amelyben lévő tojások számát 3-mal osztva a maradék 2. Ilyen kosár pedig csak egy van, ***amely 29 tojást tartalmaz***.

4.) Egy juhásztól megkérdezi egy járókelő, hogy hány juha van? A juhász ezt válaszolta: „Nem tudom hány juh van a nyájban, de tudom, hogy 500-nál kevesebb, és ha ezeket akár 2-esével, 3-asával, 4-esével, 5-ösével vagy 6-osával csoportosítanám, mindig egy kimaradna, ha viszont 7-esével, akkor egy sem maradna ki”. Hány juh van a nyájban?

Megoldás:

Először abból a feltételből indulunk ki, hogy a juhokat akár 2-esével, 3-asával, 4-esével, 5-ösével vagy 6-osával csoportosítanánk, mindig egy kimaradna. Beláthatjuk, hogy abban az esetben, ha a juhásznak 60 juha lenne (ez a 2, 3, 4, 5 és 6 számok többszörösei közül a legkisebb), akkor a csoportosításoknál egy sem maradna ki. Viszont ha a juhok számát eggyel növelnénk, akkor 61 juh esetében a csoportosításoknál mindig egy kimaradna. Viszont a 61-et 7-tel osztva a maradék 5, tehát a 7-tel való csoportosításnál 5 juh maradna ki. Az előbbi logikát követve keressük a 2, 3, 4, 5 és 6 számok többszöröseit, majd a kapott többszörösökhöz egyet hozzáadva megvizsgáljuk, hogy az így kapott számok közül melyik osztható 7-tel. Ilyen számok a 121; 181; 241; 301; 361; 421; 481; stb. Viszont a nyájban 500-nál kevesebb juh van, ezért ***az egyetlen lehetséges megoldás a 301.***

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Gyakorló feladatok

1.) Keressünk négy olyan különböző természetes számot, amelyekre érvényes, hogy:
   - összegük osztható 3-mal;
   - kettő közülük osztható 6-tal;
   - kettő közülük nem osztható 3-mal.

2.) Hány olyan 5-tel osztható négyjegyű természetes szám van, amelyben nem szerepel az 5-ös számjegy?

3.) Határozzuk meg a 3-nak öt olyan egymást követő többszörösét, amelyeknek összege 540!

4.) Egy iskolában kevesebb, mint 200 tanuló van. Ha 3-asával, 4-esével, 5-ösével, illetve 6-osával állítjuk őket, akkor 1, 2, 3, illetve 4 tanuló marad ki. Hány tanulója lehet az iskolának?

Kitűzött feladatok

1.) Elemér Bélának össze kellett adnia az összes olyan kétjegyű számot, amely osztható 5-tel. Az egyik számot tévedésből háromszor számította be, így az 1035 összeget kapta. Melyik számot számította be háromszor?

2.) Előbb a 100-at, majd a 90-et elosztottuk ugyanazzal az általunk gondolt számmal. Az első esetben az osztás maradéka 4, a második esetben pedig 18 lett. Mi lehetett a gondolt szám?

3.) Egy téglalap területe 144 cm^2, oldalai cm-ben mérve egész számok. Hány ilyen téglalap van és mekkorák ezeknek az oldalai? Melyik téglalapnak legkisebb a kerülete?

4.) András, Béla és Csaba hajóskapitányok. Egy kikötőből egyszerre indulnak, majd András 3 nap múlva, Béla 4 nap múlva, Csaba pedig 5 nap múlva tér vissza a kikötőbe. András és Béla még az érkezés napján visszaindulnak, míg Csaba mindig csak másnap indul vissza. Hány nap telik el a három hajóskapitány ötödik találkozásáig?

Beküldési határidő: **2021.12.19**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör *2021/2022. 2. feladatsor*
7.-8. évfolyam

SKATULYA-ELV

A skatulyaelv az a Dirichlet által megfogalmazott matematikai tétel, mely szerint ha *n* és *m* pozitív egészek és $n>m$, akkor *n* elemet *m* skatulyába helyezve kell lennie olyan skatulyának, amelyben 1-nél több elem van. Következzen most néhány, sokak által ismert alappélda:

Hajszálszám

Egyszerűsége ellenére a skatulyaelvvel érdekes következtetésekre lehet jutni, például, hogy van legalább két budapesti lakos, akiknek pontosan ugyanannyi szál haja van.
A bizonyításhoz mindenkihez hozzárendeljük a hajszálaik pontos számát. Egy ember hajszálainak száma általában 100 000 és 200 000 közötti. Feltehetjük, hogy senkinek sincs egy milliónál több hajszála. Márpedig Budapesten több, mint egy millióan laknak.

Kézilabda

Öt lány kézilabdázni akar, de nem akarnak ugyanabba a csapatba kerülni, és csak négy csapatba jelentkezhetnek. Mivel lehetetlen az öt lányt úgy elosztani a négy csapat között, hogy mindegyikbe legfeljebb egy jusson, így a skatulyaelv szerint lesz, aki hoppon marad.

Zoknik példája

Legyen egy fiókban 10 fekete és 12 fehér zokni. Sorra vesszük ki a zoknikat úgy, hogy nem nézünk a dobozba. Legalább hány zoknit kell kivenni, hogy legyen köztük egy pár azonos színű?

Mivel két kategória van, ezért a "legrosszabb" esetben két különböző színű zoknit vettünk ki. Ebben az esetben egy harmadik zokni már valamelyik foglalt kategóriába kell, hogy kerüljön, így három zokni esetén biztosan van egy pár.

Kézfogás

Ha $n > 1$ ember kezet fog egymással, akkor mindig lesz közöttük kettő, akik ugyanannyiszor fogtak kezet.
A kézrázások lehetséges száma nullától n-1-ig terjed, n-1 skatulyát alkotva. Ez azért van, mert vagy a nullaszor, vagy az n-1-szer kezet fogók halmaza üres, mivel, ha van, aki mindenkivel kezet fogott, akkor nem lehet senki, aki nem fogott kezet senkivel, és fordítva. Az n embert elosztva az n-1 skatulya között lesz skatulya, ahova több ember kerül.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

Mintapéldák

1.) Van 70 golyónk, közülük 20 piros, 20 zöld, 20 sárga és a maradék 10 közül néhány fekete, a többi fehér. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte 10 azonos színű golyó?

Megoldás:

Ha kiveszünk 9 piros, 9 zöld, 9 sárga golyót, valamint a fehér és fekete golyókat, akkor egyik színből sincs 10 darab, de még egy golyót kivéve, valamelyik színből már biztosan lesz 10 darab. 9 + 9 + 9 +10 + 1 = ***38 golyót kell kivennünk***.

2.) Mutassuk meg, hogy öt, 10-nél nagyobb prímszám közül mindig kiválasztható kettő, melyek különbsége osztható 10-zel!

Megoldás:

A 10-nél nagyobb prímszámok 1-re, 3-ra, 7-re vagy 9-re végződnek (azaz közöttük 4-féle végződés fordul elő). Emiatt öt, 10-nél nagyobb prímszám között biztosan van kettő, melyek ugyanarra a számjegyre végződnek, és így különbségük 0-ra végződik, azaz osztható 10-zel. ***Így bizonyítottuk az állítást***. (Ezt gyakran helyettesítik a bizonyítások végén a Quod erat demonstrandum Q.e.d. rövidítéssével, melynek jelentése: Ezt kellett bizonyítani.)

3.) Egység sugarú körlapon 7 pontot helyeztünk el. Igazold, hogy van köztük kettő, melyek távolsága 1-nél nem nagyobb!

Megoldás:

A kört osszuk fel 6 egybevágó körcikkre. Ezen 6 körcikk között lesz olyan, amelybe a 7 pontból legalább 2 pont kerül. A két pont távolsága legfeljebb 1 egység, hiszen a körcikk 60°-os. ***Q.e.d***.

4.) Bizonyítsd be, hogy egy 37-es létszámú osztályban biztosan van négy diák, akik ugyanabban a hónapban ünneplik a születésnapjukat!

Megoldás:

Mivel 12 hónap van, ha mindegyik hónapban legfeljebb három diáknak lenne születésnapja, akkor az osztályban legfeljebb 36 diák lenne. Mivel az osztály létszáma 37. ezért van legalább négy diák, akinek ugyanabban a hónapban van a születésnapja. ***Q.e.d.***

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

Gyakorló feladatok

1.) Egy dobozban néhány darab piros és néhány darab zöld golyó van. Becsukott szemmel 7 darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte piros, és 13 darabot kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen kétféle színű golyónk. Hány piros és hány zöld golyó van a dobozban?

2.) Bizonyítsd be, hogy 7 egész szám közül mindig kiválasztható kettő olyan, amelyek különbsége osztható 6-tal!

3.) A $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$ sorozatban található-e két olyan különböző szám, melyek különbsége osztható 100-zal?

4.) Egy 10x10-es táblázat mezőibe beírjuk mindig valamelyiket az 1, 2, 3 számok közül és kiszámítjuk soronként, oszloponként és a két átlóban az ott levő számok összegét. Igazoljuk, hogy a kapott összegek között lesz két azonos!

Kitűzött feladatok

1.) Mutassuk meg, hogy 20 egész szám közül mindig kiválasztható kettő olyan, amelyek különbsége osztható 19-cel!

2.) Igaz-e, hogy bármely öt egész szám között van három olyan szám, melyek összege osztható 3-mal?

3.) Egy 35x42-es téglalapban felvettünk 100 db pontot. Mutassuk meg, hogy van olyan 5x6-os téglalap, melybe legalább 3 pont került!

4.) 17 tudós mindegyike levelezik a többivel vagy angol, vagy német, vagy francia nyelven. Mutassuk meg, hogy van közöttük három, akik egymás közt ugyanazt a nyelvet használják!

Beküldési határidő: **2021.12.19**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre