Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör **2021/2022. 1. feladatsor**
5.-6. évfolyam

AZ ARÁNYOSSÁG

Két szám (mennyiség) arányának a két szám (mennyiség) hányadosát nevezzük. Például 20 és 25 aránya $\frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 4:5$. Ilyenkor azt is mondhatjuk, hogy az első szám 4 egységet, míg a második szám 5 egységet jelent.
Két mennyiség kapcsolatát egyenes arányosságnak mondjuk, ha az egyik mennyiséget valahányszorosára változtatva a másik mennyiség is ugyanannyi szorosára változik.
Két mennyiség kapcsolatát fordított arányosságnak mondjuk, ha az egyik mennyiséget valahányszorosára változtatva a másik mennyiség ennek a reciprok szorosára változik.
Arányokkal sok helyen találkozhatunk. Kiemelkedő jelentőségük van a térképészetben, a fizikában, a kémiában, a képzőművészetben, de hasznosak lehetnek sok gyakorlati kérdés megválaszolásában is.

Mintapéldák

1.) Autónk 100 km-ént 6 liter üzemanyagot fogyaszt és 50 literes tankja van. Az út elején telitankoltuk, majd megtettünk vele 440 km-t. Hány liter üzemanyag maradt az autó tankjában?

Megoldás:

A megtett kilométerek száma és az elfogyasztott üzemanyag között egyenes arányosság van, mivel kétszer akkora megtett út megtétele kétszer annyi üzemanyag fogyasztással jár. Mivel 440 a 100-nak a $440:100 = 4{,}4$ – szerese, ezért az üzemanyag fogyasztás $4{,}4 \cdot 6 = 26{,}4$ liter. Tehát a tankban maradt üzemanyag $50 - 26{,}4 = 23{,}6$ liter.

2.) Egy kisgazdaságban 112 lónak 36 napra elegendő takarmány van. Ha hoznak még 14 lovat, akkor hány napra lesz elegendő a takarmány?

Megoldás:

A lovak száma és a napok száma között fordított arányosság van, mivel például kétszer annyi ló esetében feleannyi nap alatt fogy el a takarmány. Tehát, ha csak egy lovat tekintünk, akkor a takarmány 112-szer több, vagyis $112 \cdot 36 = 4032$ napra elegendő. Viszont ha hoznak még 14 lovat, akkor 126 ló esetében 126-szor kevesebb, azaz $4032:126 = 32$ napra elegendő a takarmány.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

3.) 12 ló 15 nap alatt 1440 kg abrakot fogyaszt. Hány ló fogyaszt el 1568 kg abrakot 7 nap alatt?

Megoldás:

Egy ló 15 nap alatt $1568:12 = 120$ kg, míg egy ló egy nap alatt $120:15 = 8$ kg abrakot fogyaszt. Mivel az elfogyasztott abrak mennyisége és a napok száma között egyenes arányosság van, ezért egy ló $1568:8 = 196$ nap alatt fogyaszt el 1568 kg abrakot. A lovak száma és a napok száma között fordított arányosság van, ezért $196:7 = 28$ ló fogyaszt el 1568 kg abrakot 7 nap alatt.

4.) Egy 15 m hosszú és 24 m széles perzsaszőnyeg előállításához 5 munkásnak 8 napra van szüksége. Hány nap alatt készít el egy 20 méter széles és 36 m hosszú szőnyeget 8 munkás?

Megoldás:

Kezdetben hasonlítsuk össze a két szőnyeg területét. Az első szőnyeg területe $15 \cdot 24 = 360\,m^2$, míg a második területe $20 \cdot 30 = 720\,m^2$. Tehát a második szőnyeg területe $720:360 = 2$-szerese az első szőnyeg területének. Mivel a szőnyeg területe és a napok száma között egyenes arányosság van, ezért a második szőnyeg előállításához 5 munkásnak 16 napra van szüksége. Mivel a munkások száma és a napok száma között fordított arányosság van, ezért a második szőnyeget egy munkás $16 \cdot 5 = 80$, míg 8 munkás $80:8 = 10$ nap alatt képes elkészíteni.

Gyakorló feladatok

1.) Egy térkép méretaránya $1:30000$. Ezen a térképen két város távolsága 24 cm. Egy másik térkép méretaránya $1:80000$.
   a) Milyen távolságra van a két város egymástól a valóságban?
   b) Mennyi a két város távolsága a második térképen?

2.) Józsi bácsi egy napon a vásárban 480 kecskét vett. A következő héten hány kecskét tud vásárolni, ha a kecskék ára megduplázódik és Józsi bácsi háromszor annyi pénzzel indul a vásárba?

3.) 6 munkás napi 8 órai munkával 10 nap alatt végez el egy munkát. Naponta hány órát kell fejenként dolgozniuk, ha a munkát 8 munkás 12 nap alatt akarja elvégezni?

4.) Az idén európai körúton voltunk egy olyan autóval, amely 100 km-en 6 liter üzemanyagot fogyasztott. Egy bizonyos pénzösszegből 300 Ft/euró árfolyam mellett 3080 kilométert autóztunk. Jövőre egy olyan autóval vágunk neki az útnak, amely 100 km-en 7 litert fogyaszt. Becslésünk szerint az árfolyam 400 Ft/euró lesz. Hány kilométert utazhatunk ugyanabból a pénzösszegből?

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Kitűzött feladatok

1.) Elemér matricákat gyűjt. Kiszámította, hogy 12000 forintos zsebpénzéből 40 matricát képes vásárolni. Hány matricát vásárolhat akkor, ha édesapja a zsebpénzét másfélszerezi, a matricák ára pedig kétszeresére nő.

2.) Egy üzemben a fűtést szénnel oldják meg. 42500 kg szén 25 napra elegendő. Egy hidegebb időszakban viszont a napi elégetett szénmennyiséget kétszeresére kell emelni. Hány napig elegendő 47600 kg szén egy hidegebb időszakban?

3.) Egy országjáró túrára készülünk. Kiszámítottuk, hogy ha naponta 8 órát gyalogolunk és óránként 5 km-t teszünk meg akkor 12 nap alatt teljesítjük a távot. Hány órát kell naponta gyalogolnunk, ha ugyanezt a távot 16 nap alatt akarjuk megtenni és óránként 6 km-t teszünk meg?

4.) Egy fuvarozó cég 15 teherautóval 20 nap alatt képes egy raktárból a teljes készletet elszállítani, ha naponta minden teherautó hétszer fordul. Hány nap alatt képes elszállítani ugyanezt a készletet 21 teherautó, ha minden teherautó naponta négyszer fordul?

Beküldési határidő:	**2021.11.19.**
Postai cím:	Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ 2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör ***2021/2022. 1. feladatsor***
7.-8. évfolyam

SZÁMELMÉLETI FELADATOK

A **számelmélet** a matematika egyik ága, mely eredetileg a természetes számok oszthatósági tulajdonságait vizsgálta. Az ez irányú vizsgálatok elnevezésére még ma is alkalmazzák a számelmélet eredeti latinos elnevezését (**aritmetika**). Utóbbi szót maga a latin is a görögből vette át („arithmosz": „szám", a görög szó az „összeácsolni, összetenni, összeilleszteni" igéből eredt). A természetes számok számelméleti tulajdonságai vizsgálhatóak egészen elemi eszközökkel is (elemi számelmélet), de a felsőbb matematika eszköztára (komplex analízis) segítségével is (analitikus számelmélet).
A számelmélet területén számos egyszerű, laikusok számára is könnyen érthető problémával találkozhatunk, amelyek megoldása azonban még a legnagyobb elméknek is komoly, sokszor megoldhatatlan kihívást jelent (lásd a Nagy Fermat-tételt vagy az Ikerprím-sejtést).

Mintapéldák

1.) 7 rabló a zsákmányolt aranyat úgy osztja el, hogy névsor szerint vesznek belőle annyit, amennyi az ott levő aranyak számának a számjegyösszege (pl. ha a soron következő zsivány előtt 156 db arany van, akkor ő 1+5+6=12 db-ot vesz el). Két teljes kör után az arany elfogy. Mindenkinek ugyanannyi jutott, csak a bandavezérnek lett több. Hányadik a névsorban a főnök, s mennyi arany jutott neki?

Megoldás:

Ha egy számból levonjuk jegyei összegét, 9-cel osztható számot kapunk. Ezért az első elvétel után 9-cel osztható számok követik egymást. Legutoljára 9 aranyból vettek. Visszafelé követve, az aranyak száma ebben a sorrendben rendre: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 (a 90 nem szerepelhet!) 99, 108, 117, 126, 135 (130-139 között csak ez lehet, ha azt akarjuk, hogy csak egy ember kap többet-). Innen leolvasható, hogy a főnök ötödik a névsorban, s neki 27 arany jutott a zsákmányból.

2.) - Nem tudod- kérdezte a lottóhúzás napján egy matematikus a kollégáját -, hogy milyen számokat húztak ki?
- Képzeld - felelte az -, van köztük olyan szám, amellyel bármely két kihúzott szám összege osztható!
- Mi ez a szám?
- Ha megmondanám, kitalálnád a nyerőszámokat.
- Legalább azt mondd meg, páros vagy páratlan ez a szám?- kérte a matematikus, majd a válasz után felkiáltott:
- Ötösöm van!

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

Mi volt az öt nyerőszám, ha a telitalálatot elért matematikus csak egy szelvénnyel játszott? (Feltesszük, hogy mindketten jól okoskodtak és persze igazat mondtak.)

Megoldás:

A legkisebb szám az, amellyel bármely két szám összege osztható, és ennek a számnak többszöröse a többi szám. Ezen szám ismeretében akkor található ki mind az öt szám, ha 90-ig csak öt olyan szám van, mely osztható ezzel a számmal. Három ilyen van: 16, 17, 18. Ezek közül akkor egyértelmű a választás, ha a szám páratlan, azaz 17. A nyerő számok: 17, 34, 51, 68, 85.

3.) „Hányan laknak ebben a házikóban?” - tette fel a kérdést a népszámlálási összeíró.
„Hárman.”
„Hány évesek?”
„Életkoruk szorzata 225, éveik összege azonos a házszámmal.”
Az összeíró megnézte a házszámot, majd így felelt:
„Ebből sajnos még nem tudom az életkorukat megállapítani. Ön a legidősebb?”
„Igen”- hangzott a válasz.
„Akkor most már tudom!”-mondta.
Határozzuk meg a lakosok életkorát!

Megoldás:

Három olyan számot keresünk, melyek szorzata 225, összege egy ismeretlen szám; melyet az összeíró tudott, s még mindig kérdeznie kellett. A 225-nek csak két olyan felbontása van, amelynél a 3-3 szám összege ugyanaz:1, 15,15, és 3, 3, 25. Ez utóbbi adja a megoldást.

1. ember	2. ember	3. ember	Összéletkor
1	1	225	227
1	3	75	79
1	5	45	51
1	9	25	35
1	15	15	31
3	3	25	31
3	5	15	23
5	5	9	19

4.) Két padon 6-6 gyerek ül. Valamennyien különböző életkorúak (az életkorok egész számok), és az egyik padon ülő gyerekek életkorának összege és szorzata is megegyezik a másik padon ülők életkorának összegével, ill. szorzatával. A legidősebb gyerek 16 éves. Hány évesek azok a gyerekek, akik vele egy padon ülnek?

Megoldás:

Bontsuk fel 1-től 16-ig a számokat prímhatványokra. Mivel mindkét oldalon a 6-6 szám szorzata ugyanannyi, így minden előforduló prímtényezőnek páros hatványon kell szerepelnie. Ha összeszorozzuk őket, akkor az alábbit kapjuk:

$$2^{15} \cdot 3^{6} \cdot 5^{3} \cdot 7^{2} \cdot 11 \cdot 13$$

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

Ezért a 11 és a 13 kiesik az életkorok közül, mert ők csak egyszer-egyszer szerepelnek, így marad 14 számunk. Ezek közül 8 páros és 6 páratlan. Mivel a 6-6 szám összege ugyanannyi mindkét oldalon, így vagy két páros, vagy két páratlan számnak kell kiesnie. Mivel azonban a 2-nek 15. hatványa szerepel, ami nem páros, így egy páros számnak ki kell esnie, tehát 6 páros, ill. 6 páratlan számnak kell maradnia. Mivel azonban az 5 kitevője is 3, azaz páratlan, így egy 5-tel osztható páros számnak kell kiesnie, ami a 10. Mivel a 2 hatványa így 14 marad, ezért a másik kieső páros számnak a 4-esnek kell lennie.
Ezek után az alábbi 12 szám maradt: 1;2;3;5;6;7;8;9;12;14;15;16.
Ezek összege 98, így a két oldalon az összegnek 49-49 lesz. A szorzat $60480 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
Innen a lehetséges esetek végigszámolásával adódik a 6-6 gyerek életkora, ami: 1;5;8;9;12;14, illetve a 16 éves mellett ülők életkora: 2;3;6;7;15.

<u>Gyakorló feladatok</u>

1.) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, melynek a fele négyzetszám, harmada köbszám?

2.) X-né dicsekszik a munkatársainak: „Mind a két fiamnak ma van a születésnapja. Egyik sincs még 10 éves. Találjátok ki, hogy mennyi idősek! Anna, neked megsúgom az életkoruk szorzatát.” (Megsúgja.) Anna: „Ebből még nem lehet meghatározni.” „Akkor Borinak az életkoruk hányadosát súgom meg.” (Megsúgja.) Bori: ”Még most sem egyértelmű.” „Igazatok van, Borinak a korkülönbséget kellett volna megmondanom, akkor kitalálhatta volna.”
Hány évesek X-né fiai?

3.) András és Tamás is kiválaszt magának egy-egy pozitív egész számot, s ezt a számot megsúgják Petinek. Peti közli velük, hogy a két szám különbsége 1995. Erre András kijelenti, hogy ő nem tudja megmondani a másik számot, majd Tamás is ugyanezt mondja. Ezek után András kijelenti, hogy most már tudja, milyen számot választott Tamás, de ha mindketten 1-gyel nagyobb számra gondoltak volna, akkor még nem tudta volna kitalálni.
Mi volt a két szám?

4.) Kovács úr Seholsincs utcában lakik egy házban, amelynek száma 13 és 1300 közötti szám. Horváth úr kíváncsi Kovács úr házának számára, ezért kérdezgetni kezdi. Horváth: „Nagyobb, mint 500?” Kovács válaszol, de hazudik. (Horváth ezt nem tudja.) Horváth: ”Négyzetszám?” Kovács válaszol, de hazudik. (Horváth ezt nem tudja.) Horváth: ”Köbszám?” Kovács válaszol és igazat mond. Horváth: ”Ha most megmondod, hogy a szám utolsó előtti számjegye 1-es vagy sem, akkor meg tudom mondani, hogy hol laksz. ”Kovács válaszol. Erre Horváth megmondja az általa helyesnek tartott házszámot, amire Kovács azt mondja: ”Tévedtél.”
Mi Kovács úr házszáma?

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

Kitűzött feladatok

1.) Gyermekeim években kifejezett életkorának szorzata 1664. A legfiatalabb legalább fele annyi idős, mint a legidősebb. Én 50 éves vagyok. Hány gyermekem van?

2.) Egy reggel a pap azt mondja a sekrestyésnek:
„Ma találkoztam három emberrel. Az években kifejezett életkoruk szorzata egyenlő 2450-nel, összege pedig kétszerese az ön életkorának. Milyen idősek azok az emberek?”
Délután a sekrestyés bevallja, hogy nem tud válaszolni a kérdésre. Erre a pap kisegíti:
„Megjegyzem, hogy a három ember közül az egyik idősebb nálam.”
Hány éves a pap, ha a sekrestyés ismeri az életkorát?

3.) Egy matematikai kongresszus szünetében történt. Mikor az egyik résztvevő professzortól azt kérdezték kollégái, hány gyereke van és milyen idősek, így felelt:
Három fiam van; a véletlen úgy hozta, hogy mind a háromnak épp ma van a születésnapja.
Ha években kifejezett életkorukat összeszorzom, 36-ot kapok; ha viszont összeadom ugyanezt a három számot, akkor pontosan annyit, ahányadika ma van.
Kisvártatva így hangzott a viszontválasz:
Ebből még nem tudhatjuk, hogy hány évesek a gyerekek.
Igaz is, elfelejtettem megmondani: amikor a legkisebb gyerek születését vártuk, a két idősebbet elküldtük vidékre a nagyszüleikhez.
Köszönjük, most már tudjuk mind a három gyerek életkorát.
Állapítsuk meg, hány évesek a gyerekek, és azt is, hogy a hónapnak hányadik napján hangzott el ez a beszélgetés!

4.) Peti két egymást követő pozitív egész számot választ, ezeket külön-külön felírja egy-egy cédulára. Egyiket Andrásnak, másikat Tamásnak adja oda (akik tudják, hogy a két szám szomszédos), mindketten megnézték, hogy milyen szám van a papírjukra írva, de ezt nem közölték a másikkal. Ezután a következő tartalmas párbeszéd zajlott le közöttük:
András: „Én nem tudom, hogy nálad milyen szám van.”
Tamás: „Én sem tudom, hogy nálad milyen szám van.”
András: „Én nem tudom, hogy nálad milyen szám van.”
Tamás: „Én sem tudom, hogy nálad milyen szám van.”
András összesen tízszer mondta el, hogy nem tudja, hogy milyen szám van Tamásnál, és Tamás is tízszer válaszolja azt, hogy ő nem tudja, milyen szám van Andrásnál. Ám a tizenegyedik alkalommal András azt mondta: „Most már tudom, hogy milyen szám van nálad.”
Milyen szám van Tamásnál?

Beküldési határidő:	**2021.11.19.**
Postai cím:	Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ 2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre