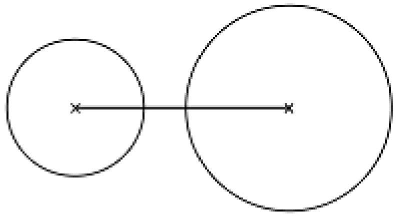
Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör ***2012/2013.2. feladatsor***
7.-8. évfolyam

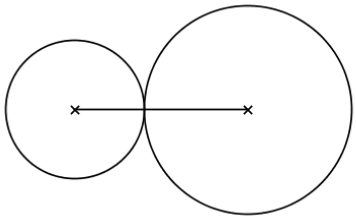
MEGOLDÁSOK

1. Adott két pont, A és B. Szerkesszünk pontot, amely az A ponttól 2, a B ponttól 3 cm távolságra van. Keresd meg az összes lehetséges elrendezést!

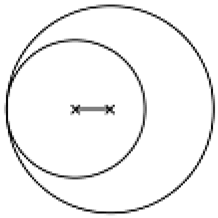
a) ha $d_{AB} > 5$cm: nincs megoldás



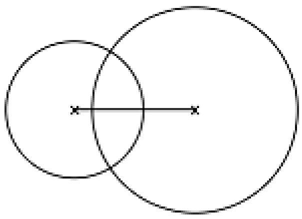
b) ha $d_{AB} = 5$cm: 1 megoldás



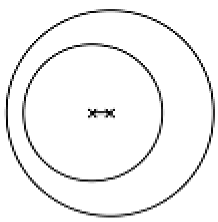
c) ha $d_{AB} = 1$cm: 1 megoldás



d) ha 1cm $< d_{AB} <$ 5cm: 2 megoldás



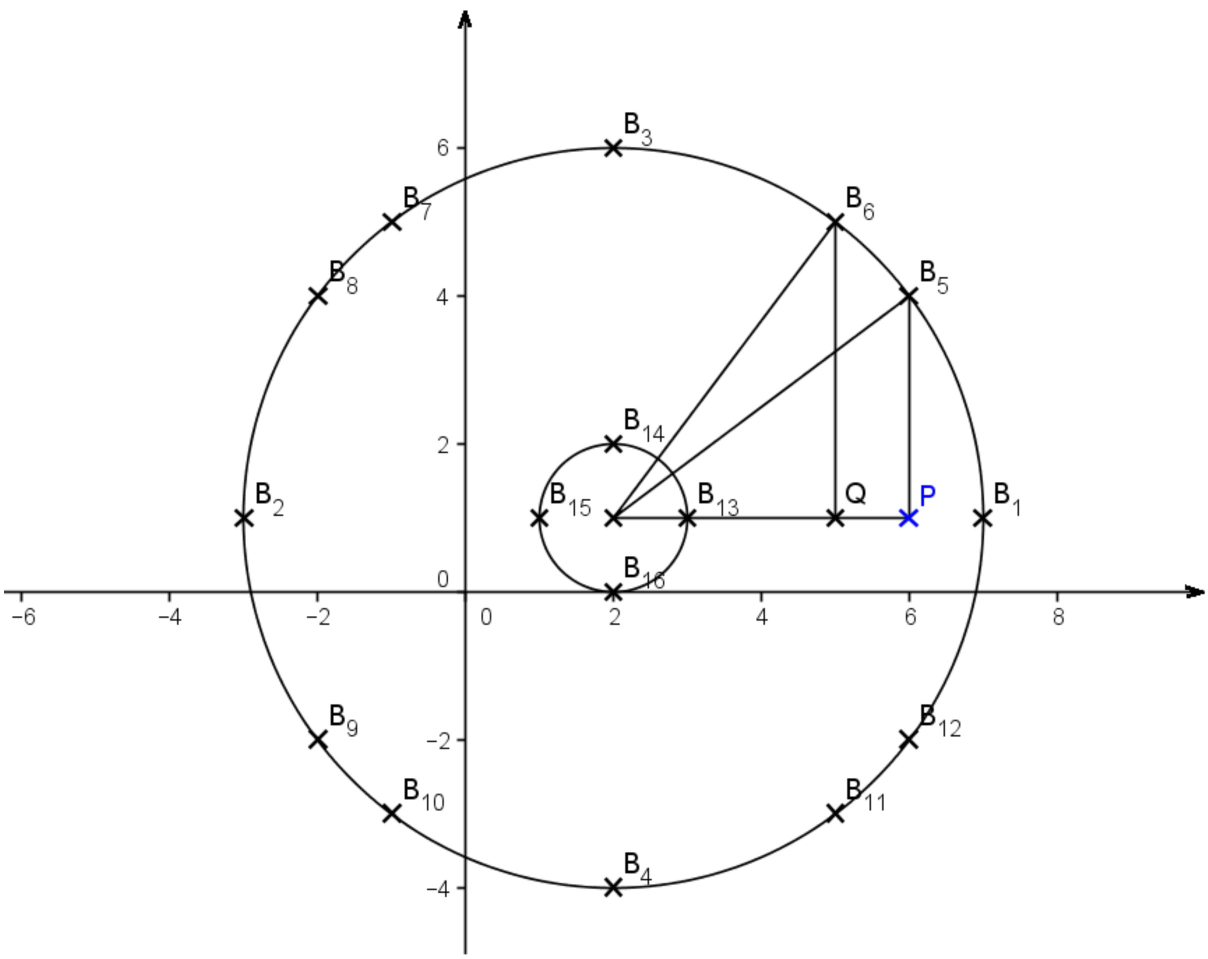
e) ha $d_{AB} < 1$cm: nincs megoldás



2. Foglalkozzunk most az előző feladat azon eseteivel, ahol csak egy megoldás van. Helyezzük most el most a pontokat derékszögű koordináta-rendszerben, legyenek A koordinátái A(2;1). Add meg azoknak a lehetséges B pontoknak a koordinátáit, melyekre igaz, hogy mindkét koordinátája egész! (Itt most legyen 1 cm az egység a koordináta-rendszer tengelyein.)

   a) d_{AB} = 5cm (a körök kívülről érintik egymást: a keresett pontok az A középpontú 5 egység sugarú körön vannak)
      - triviális megoldások: az A középpontú 5 egység sugarú körnek és az A ponton áthaladó és a tengelyekkel párhuzamos egyenesek metszéspontjai:
      B_1(7;1) B_2(-3;1) B_3(2;6) B_4(2;-4)
      - A kör egy pontját az A ponttal összekötve, illetve a ponton keresztül az y tengellyel párhuzamos egyenest és az A ponton keresztül egy x tengellyel párhuzamos egyenest húzva egy háromszöget kapunk, aminek az átfogója 5, és a két befogó is egész szám – ekkor a két befogó csak 3 és 4 lehet (3, 4, és 5: pitagóraszi számhármasok). Ezek alapján:
      B_5(6;4) B_6(5;5) B_7(-1;5) B_8(-2;4)
      B_9(-2;-2) B_{10}(-1;-3) B_{11}(5;-3) B_{12}(6;-2)

   b) d_{AB} = 1cm (a 2cm-es sugarú kör belülről érinti a 3 cm-es kört: a keresett pontok az A középpontú 1 egység sugarú körön vannak)
      mivel a koordinátáknak egészeknek kell lenniük, ezért csak a következő pontok tartoznak a megoldáshoz:
      B_{13}(3;1) B_{14}(2;2) B_{15}(1;1) B_{16}(2;0)

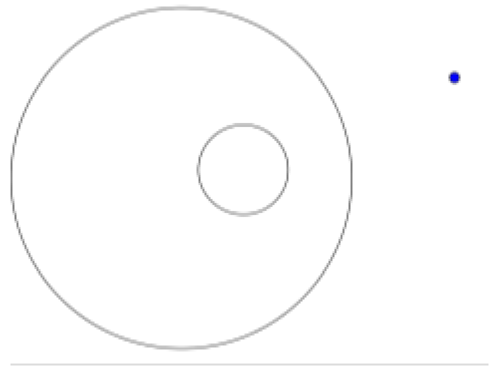


3. Adott két kör és egy pont. Hány olyan kör létezhet, mely a két adott kört érinti, az adott ponton pedig átmegy? Ismét nem a szerkesztés, hanem a megoldásszám az érdekes. Minden esetre rajzolj egy példát!

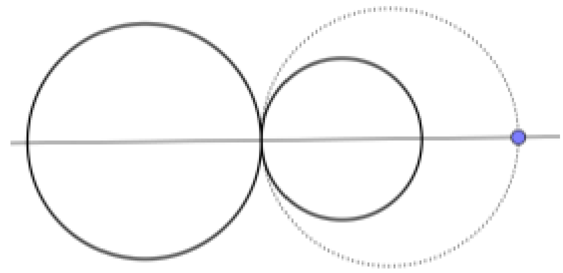
   Nem kellett bizonyítani, ebben a feladatban, hogy hány megoldás lehet, csak meg kellett találni ügyesen ábrákat rajzolgatva, hogy mérettől és elrendezéstől függően hány megoldás lehet. Lehet, hogy nincs megoldás, lehet, hogy 1, 2, 3, 4 vagy végtelen sok megoldás is létezik. (Ezt az állítást később egyébként algebrai úton igazolni is lehet.) Bármely jó ábrát elfogadunk, mi itt a sok lehetséges helyes megoldás közül egyet adunk meg mindegyik esethez.

   Vegyük sorra a 6 esetet.

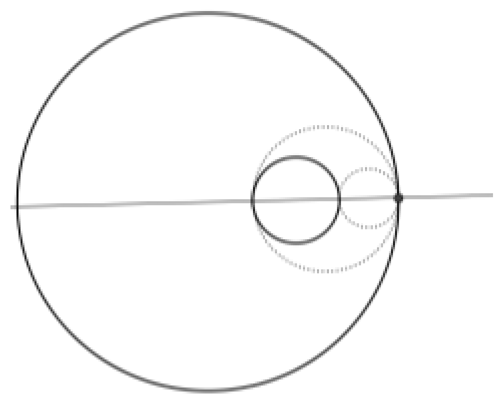
- Nincs megoldás. Például, ha az egyik kör a másikon belül helyezkedik el, a pont pedig mindkét körön kívül.



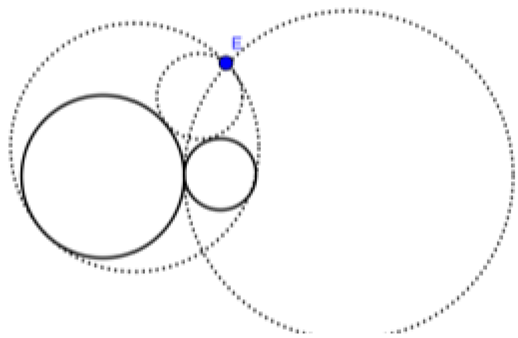
- 1 megoldás van. Például, ha a két kör kívülről érinti egymást, a pont pedig a körök középpontjai által meghatározott egyenesen a körökön kívül van.



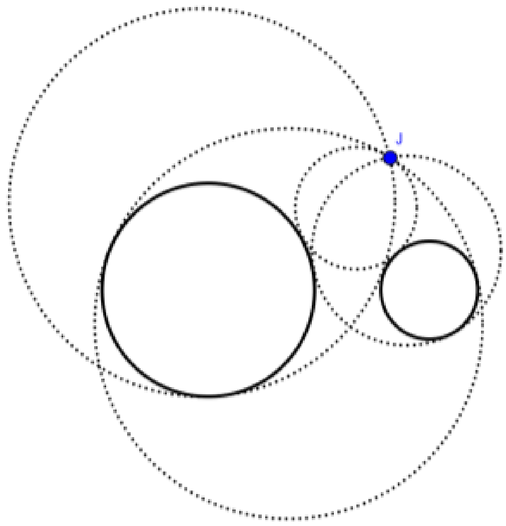
- 2 megoldás van. Például, ha az egyik kör a másikon belül helyezkedik el, az adott pont pedig a körök középpontjai által meghatározott egyenes és a nagyobbik kör metszéspontja.



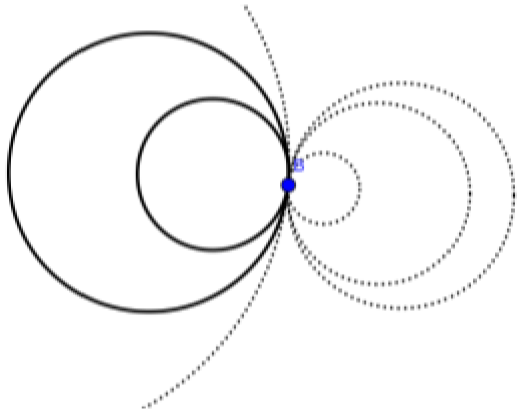
- 3. megoldás van. Például, ha két különböző méretű kör kívülről érinti egymást, az adott pont pedig a körökön kívül helyezkedik el, mégpedig a körök közös belsőérintő egyenesén kívül.



- 4 megoldás van. Például, ha a két kör egymáson kívül helyezkedik el, nem érintik egymást, az adott pont pedig a körökön kívül van. Ilyenkor lesz egy megoldás, mely mindkét körön kívül van, egy olyan, amikor az egyik adott kör az érintő körön belül a másik pedig kívül van, illetve fordítva, és egy olyan, mikor mindkét adott kör az érintő körön belül van.



- Végtelen sok megoldás van. Például, ha a két kör érinti egymást, az adott pont pedig az érintési pont.



4. Két munkás közül az egyik naponta a, a másik b munkadarabot készít el. Eddig az első p, a második q munkadarabot készített el. Hány nap múlva lesz egyenlő a két munkás által elkészített munkadarabok száma, ha naponta mindegyikük egyenlő ideig dolgozik?

1. ha $a>b$: az első munkás naponta a-b-vel többet készít

- ha $p>q$: a különbség egyre nő, soha nem lesz egyenlő
- ha $p=q$: 0 nap
- ha $p<q$: $\frac{q-p}{a-b}$ nap múlva

2. ha $a=b$: nem változik a különbség

- ha $p>q$: soha (a különbség nem fog csökkenni)
- ha $p=q$: mindig (minden nap ugyanannyi lesz az elkészített munkadarabok száma)
- ha $p<q$: soha (a különbség nem fog csökkenni)

3. ha $a<b$: az második munkás naponta b-a-val többet készít

- ha $p>q$: $\frac{p-q}{b-a}$ nap alatt fogy el a különbség
- ha $p=q$: 0 nap
- ha $p<q$: a különbség egyre nő, soha nem lesz egyenlő